

الدوال الحقيقية ورسم الدوال

- الدوال الحقيقية
- اطراد الدوال
- العمليات على الدوال - تركيب دالتين
- الدالة الزوجية - والدوال الفردية - الدوال الأحادية
- التمثيل البيانى للدوال والتحويلات الهندسية
- حل المعادلات ومتباينات القيمة المطلقة

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

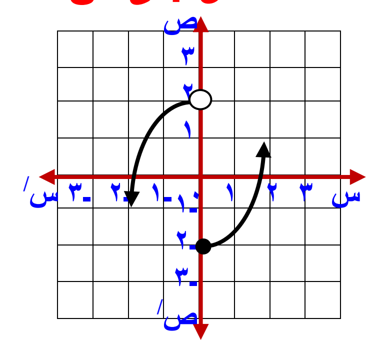
مجـــــال الدالــــــة

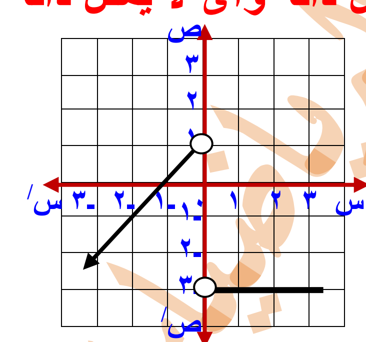
* إذا كانت سـ، صـ مجموعتين جزئيتين غير خاليتين من المجموعة ع فإن العلاقة من سـ إلى صـ تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من سـ بعنصر واحد فقط من صـ ، تسمى سـ مجال الدالة ، صـ المجال المقابل لها

* مدى الدالة هو مجموعة صور عناصر المجال ، وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل.

* العلاقة لا تمثل دالة إذا وجد مستقيم واحد على الأقل يوازى محور الصادات ويقطع الشكل البيانى للدالة فى أكثر من نقطة

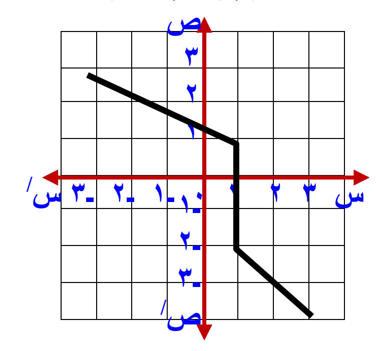
مثـــ١ـــال :أى من الأشكال يمثل دالة وأى لا يمثل دالة

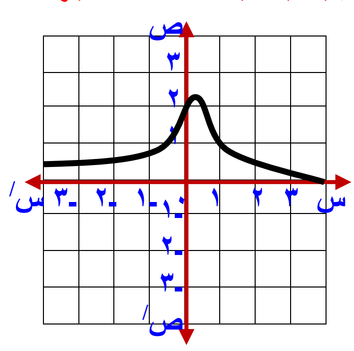


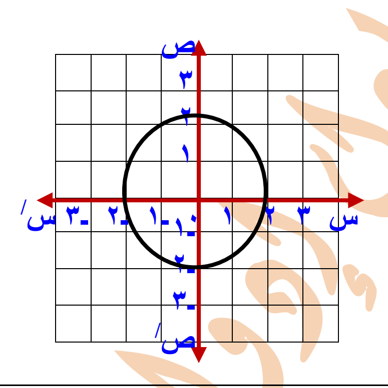


يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	يمثل دالة لأن كل عنصر فى المجال له صورة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن كل قيمة حقيقية للمتغير سـ يناظرها قيمتان مختلفتان صـ

مثـــ٢ـــال بين أياً من الأشكال البيانية يمثل دالة أيها لا







لا يمثل دالة لأنه يوجد خط رأسى عند النقطة ١ ∋ المجال يقطع المنحنى فى أكثر من نقطة	يمثل دالة لأن كل خط رأسى يقطع المنحنى فى نقطة واحدة على الأكثر	لا يمثل دالة لأن يوجد خط مستقيم // محور الصادات يقطع الشكل البيانى فى أكثر من نقطة

تحديد مجال الدالة الحقيقية

[١] مجال الدالة كثيرة الحدود: هو ع مالم تكن معرفة على مجموعة جزئية منها

[٢] مجال الدالة الكسرية : هو ع ـ مجموعة أصفار المقام

[٣] مجال الدالة الجذرية : إذا كانت : د (س) = $\sqrt[ن]{هـ(س)}$ حيث ن ∈ $ص^+$

!) عندما: (ن) عدد فردى فإن مجال الدالة = ع

!!) عندما (ن) عدد زوجى فإن مجال الدالة هو مجموعة قيم س بشرط هـ (س)≥ ٠

مثـ١ـال: عين مجال الدالة : د(س) = $س^٣$ ــ ٥ س + ٤

الدالة كثيرة الحدود ∴ مجال الدالة هو ع

مثـ٢ـال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ $س^٢$ ـ٩ = (س ـ٣)(س +٣) = ٠ ⟸ س = ٣ ، أ ـ٣

∴ مجال الدالة = ع ـ {-٣ ، ٣}

مثـ٣ـال: عين مجال الدالة : د(س) = ٥ + $\sqrt{س - ٣}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt{ر(س)}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية التى تجعل ر(س) ≥ صفر (ما تحت الجذر ≥ صفر)

مجال الدالة = { س : س∈ ع ، س ـ ٣ ≥ ٠}

= { س : س ∈ ع ، س ≥ ٣ } = [٣ ، ∞ [

مثـ٤ـال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٥س + ٦}$

الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع ـ { أصفار المقام }

بوضع المقام = ٠ ⟸ $س^٢$ ـ ٥س +٦ = (س ـ٢)(س ـ٣) = ٠ ⟸ س = ٢ أ، ٣

∴ مجال الدالة = ع ـ {٢ ، ٣}

مثـــ٥ـــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\sqrt[3]{س + ٨}$

الدالة على صورة دالة جذرية : د(س) = $\sqrt[3]{ر(س)}$

مجالها جميع الأعداد الحقيقية   مجال الدالة هو ع

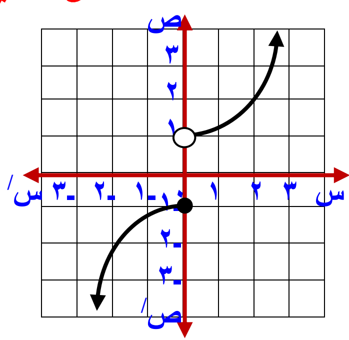
مثـــ٦ـــال: عين مجال الدالة : د(س) = $\frac{٢س}{س^٢ + ٤}$

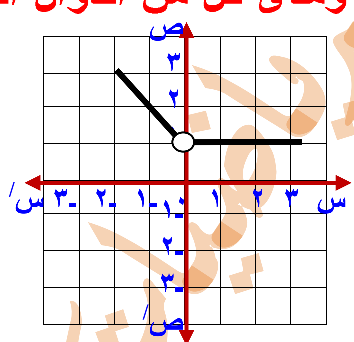
الدالة الكسرية الجبرية : مجالها = ع - { أصفار المقام }

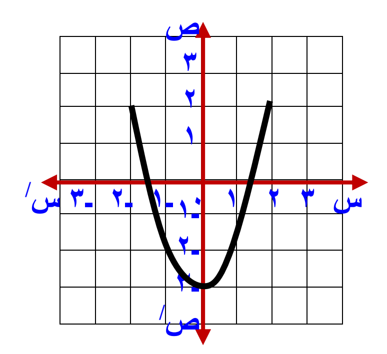
بوضع المقام = ٠ ⟸ $س^٢$ + ٤ ⟸ $س^٢$ = - ٤ ⟸ ليس لها حل فى ع

∴ مجال الدالة هو ع

مثـــــ٧ـــــال :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة







المجال = ع المدى = ع -]١ ، -١[	المجال = ع - {٠} المدى =]١ ، ٣]	المجال = [-٢ ، ٢] المدى = [-٣ ، ٢]

العمليات على الدوال

إذا كانت : $د_١$ ، $د_٢$ دالتين مجالهما $م_١$ ، $م_٢$ على الترتيب فإن:

- ($د_١$ ± $د_٢$) (س) = $د_١$ (س) ± $د_٢$ (س) ⟸ حيث مجال ($د_١$ ± $د_٢$) هو $م_١ \cap م_٢$
- ($د_١$ × $د_٢$) (س) = $د_١$ (س) × $د_٢$ (س) ⟸ حيث مجال ($د_١$ ± $د_٢$) هو $م_١ \cap م_٢$
- ($\frac{د_١}{د_٢}$) (س) = $\frac{د_١ (س)}{د_٢ (س)}$

حيث مجال ($\frac{د_١}{د_٢}$) هو $م_١ \cap م_٢$ - مجموعة أصفار $د_٢$

مثـــ٨ـــال : عين مجال د(س) = $\sqrt{س - ٣}$ + $\sqrt{٥ - س}$

الحـــــــــــــل

مجال الدالة = $\sqrt{س - ٣}$ م١ = { س : س ∈ ح ، س – ٣ ⩾ ٠ } = [٣ ، ∞ [

مجال الدالة = $\sqrt{٥ - س}$ م١ = { س : س ∈ ح، ٥ – س ⩾ ٠} =] – ∞ ، ٥]

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = { س : س ∈ ح ، س ⩾ ٣ ، س ⩽ ٥ } = [٣ ، ٥]

مثـــ٩ـــال : عين مجال د(س) = $\frac{\sqrt{س - ٢}}{س - ٣}$

الحـــــــــــــل

مجال البسط م١ = { س : س ∈ ح ، س – ٢ ⩾ ٠} = [٢ ، ∞ [

مجال المقام م٢ = ح – ٣

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ – { أصفار المقام}

= { س : س ∈ ح ، س – ٢ ⩾ ٠} – { ٣ } = [٢، ∞ [– { ٣ }

مثـــ١٠ـــال : عين مجال د(س) = $\frac{س + ٥}{\sqrt{س + ١}}$

الحـــــــــــــل

مجال البسط = م١ = ح ، مجال المقام =م٢= { س : س ∈ ح ، س +٢ > ٠}

مجال الدالة = { س : س ∈ ح ، س ⩾ – ١} =] – ١، ∞ [

مثـــ١١ـــال : عين مجال د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ + $\frac{١}{\sqrt{٨ - س^٢}}$

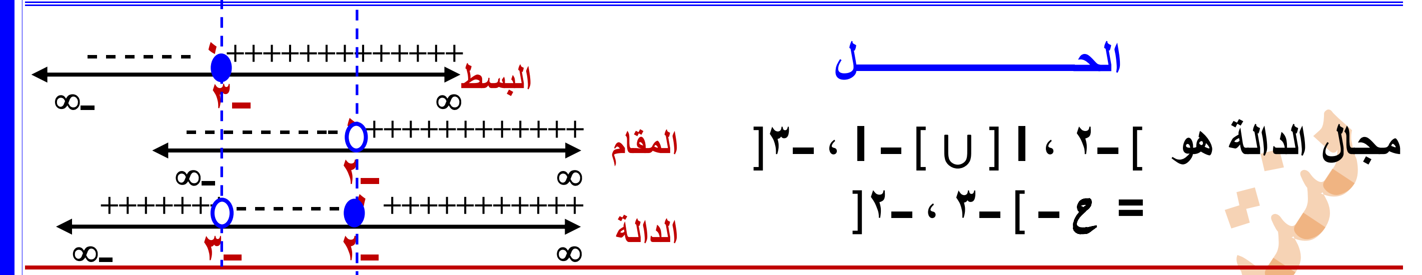
الحـــــــــــــل

م١ = { س : س ∈ ح ، س – ٢ ⩾ ٠ } = [٢ ، ∞ [

م٢ = { س : س ∈ ح ، ٨ – س٢ > ٠} =] – ∞ ، ٤[

مجال الدالة = م١ ∩ م٢ = [٢ ، ∞ [∩] – ∞، ٤ [= [٢ ، ٤ [

مثـــ١٢ـــال :عين مجال د(س) = $\sqrt{\frac{س + ٣}{س + ٢}}$



الحـــــــل

مجال الدالة هو] ـ٢ ، ∞ [∪] ـ∞ ، ـ٣[
= ح ـ [ـ٣ ، ـ٢]

تركيب دالتين

إذا كانت : د ، ر دالتين فإن تركيب الدالة د مع الدالة ر ينتج دالة جديدة يرمز لها بالرمز (د ○ ر) وتقرأ د تركيب ر أو(د بعد ر) ويكون (د ○ ر)(س) = د(ر(س))
وتطبق قاعدة الدالة ر أولاً ثم قاعدة الدالة د

❖ لتعيين مجال الدالة: د ○ ر نتبع الخطوات التالية

(١) نوجد $م_١$ = مجال الدالة ر(س)

(٢) نوجد $م_٢$ = قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د

(٣) نوجد $م_١ \cap م_٢$ وهو مجال د ○ ر

❖ (د ○ ر)(س) ≠ (ر ○ د)(س) عملية تركيب دالتين ليست عملية إبدالية

مثـــ١٣ـال :إذا كانت: د(س) = ٢س + ٣ ، ر(س) = $س^٢$ + ١ فأوجد كلاً من التركيبات

Ⓐ (د ○ ر) (س) Ⓑ (ر ○ د) (س) Ⓒ (د ○ د) (س)

الحـــــــل

Ⓐ (د ○ ر) (س) = د (ر (س)) = ٢(ر (س)) +٣
= ٢($س^٢$ +١) +٣ = ٢$س^٢$ + ٢ + ٣ = ٢$س^٢$ + ٥

Ⓑ (ر ○ د) (س) = ر (د (س)) = (د (س))^٢ +١
= (٢س + ٣)^٢ + ١ = ٤$س^٢$ +١٢س + ٩ + ١
= ٤$س^٢$ +١٢س + ١٠

[نلاحظ من المثال أن : (د ○ ر)(س) X (ر ○ د)(س)]

Ⓒ (د ○ د) (س) = د (د(س)) = د (٢س + ٣)
= ٢(٢س + ٣) +٣ = ٤س + ٦ + ٣ = ٤س + ٩

مثـــ١٤ـــال : إذا كان د(س) = √(س ـ ١) ، ر(س) = س^٢ ـ ٣

أوجد (د ∘ ر) (س) فى أبسط صورة موضحاً المجال ثم أوجد (د ∘ ر) (٢)

الحـــــــــــل

• (د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = √(ر (س)) ـ ١)

= √(س^٢ ـ ٣ ـ ١) = √(س^٢ ـ ٤)

ر(س) = س^٢ ـ ٣ ⟸ مجال ر(س) = م١ = ع

• مجال (د ∘ر) (س)

بوضع (س^٢ ـ ٤) ⩾ ٠ ⟸ (س ـ٢)(س +٢) ⩾ ٠

∴ (م٢) نوجد قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د = ع ـ] ـ٢ ، ٢[

مجال الدالة (د ∘ ر) (س) = م١ ∩ م٢ = ع ∩ ع ـ] ـ٢ ، ٢[= ع ـ] ـ٢ ، ٢[

• (د ∘ ر) (٢) = √(س^٢ ـ ٤) = √(٤ ـ ٤) = صفر

مثـــ١٥ـــال :إذا كانت د(س) = √(س ـ ٣) ، ر(س) = √(٥ ـ س)

فأوجد مجال الدالة (د ∘ ر) (س)

الحـــــــــــل

(د ∘ ر) (س) = د (ر (س)) = د (√(٥ ـ س)) = √(√(٥ ـ س) ـ٣)

ر(س) = √(٥ ـ س) بوضع ٥ ـ س ⩾ ٠ ⟸ المجال م١ =] ـ ∞ ، ٥]

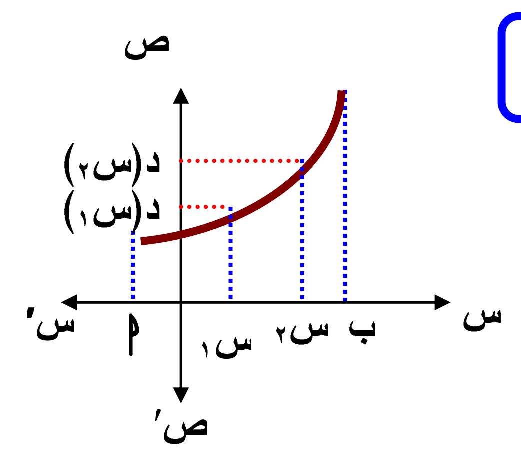
بوضع √(٥ ـ س) ـ٣ ⩾ ٠ ⟸ √(٥ ـ س) ⩾ ٣ نتربيع الطرفين

٥ ـ س ⩾ ٩ ⟸ ـ س ⩾ ٤

∴ (م٢) نوجد قيم س التى تجعل ر(س) فى مجال د =] ـ ∞، ٤]

مجال الدالة (د ∘ ر) (س) = م١ ∩ م٢ =] ـ ∞ ، ٥] ∩] ـ ∞ ، ٤] =] ـ ∞ ، ٤]

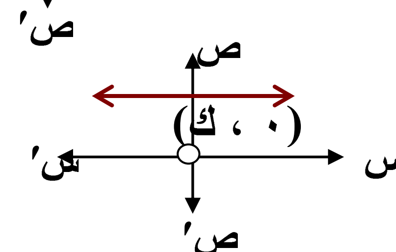
اطراد الدوال



(١) يقال للدالة د إنها تزايدية فى الفترة [٢ ، ب]

إذا كان : $س_٢ > س_١ \Leftarrow$ د $(س_٢) >$ د $(س_١)$

لكل $س_١$ ، $س_٢ \in$ [٢ ، ب]



(٢) يقال للدالة د إنها تناقصية فى الفترة [٢ ، ب]

إذا كان : $س_٢ > س_١ \Leftarrow$ د $(س_٢) <$ د $(س_١)$

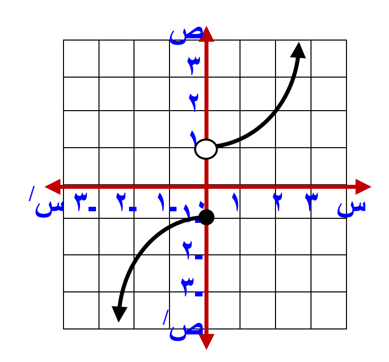
لكل $س_١$ ، $س_٢ \in$ [٢ ، ب]

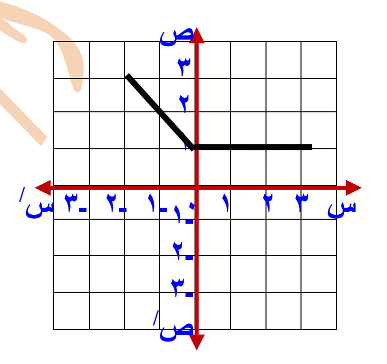
(٣) يقال للدالة د إنها ثابتة فى الفترة [٢ ، ب]

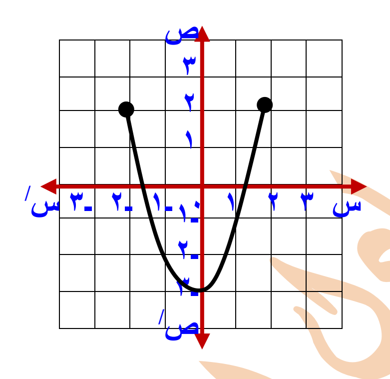
إذا كان : د (س) = ك مقدار ثابت

لكل س $\in$ [٢ ، ب]

مثـــال ١٦ : من الرسم البيانى اذكر المجال والمدى وابحث اطرادها

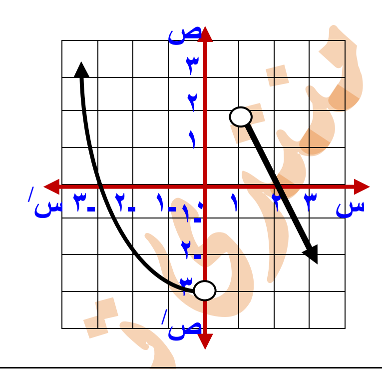


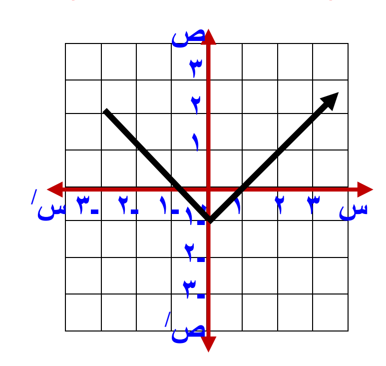


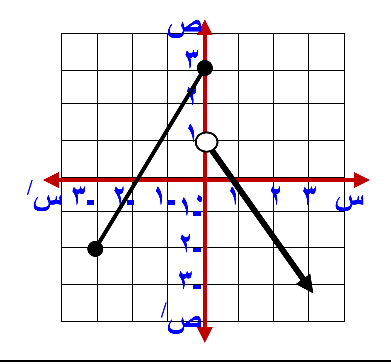


المجال = ح ،	المجال = ح − {٠} ،	المجال = [−٢ ، ٢]
المدى = ح − [−١ ، ١ [	المدى =] ١ ، ٣]	المدى = [−٣ ، ٢]
الدالة تزايدية فى] −∞ ، ٠]	الدالة تناقصية فى] −٢ ، ٠]	الدالة تناقصية فى] −٢ ، ٠]
الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [	الدالة ثابتة فى] ٠ ، ٣]	الدالة تزايدية فى] ٠ ، ٢ [

مثـــــال ١٧ :عين مجال ومدى كل من الدوال الممثلة







المجال = ح المدى = ح ـ [٠، ١ [الدالة تزايدية فى] ـ∞ ، ٠[الدالة تناقصية فى] ١ ، ∞ [	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المدى = [١ ، ∞ [الدالة تناقصية فى] ـ∞،٠ [الدالة ثابتة فى] ٠ ، ∞ [	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المدى =] ـ∞ ، ٣] الدالة تزايدية فى] ـ٣ ، ٠] الدالة تناقصية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة الزوجية والدالة الفردية

(١) إذا كان د(- س) = د(س) تكون الدالة زوجية

ويكون منحناها متماثلاً حول محور الصادات

مثل : د(س) = س^{٢} ، د(س) = جتا س ، د(س) = ﻫ ، د(س) = س^{٤}

(٢) إذا كان د(- س) = - د(س) تكون الدالة فردية

ويكون منحناها متماثلاً حول نقطة الأصل

مثل : د(س) = س ، د(س) = جا س ، د(س) = ظا س ، د(س) = جا س

(٣) معظم الدوال لازوجية ولافردية إذا كانت : د(ـ س) X د(س) أ، د(ـ س)Xـ د(س)

(٤) عند بحث نوع الدالة د يجب تحقق شرط انتماء العنصرين س ، ـ س إلى المجال

(٥) د(س) = ﻫ س^{ن} تكون زوجية إذا كان ن عدد زوجى ، فردية إذا كان ن عدد فردى

(٦) جا (- س) = - جا س ، جتا(- س)= جتا س ، ظا(- س) = - ظا س

(٥) إذا كان : الدالة فردية (ف) أو الدالة زوجية (ز) فإن (ز ± ز) دالة زوجية

، (ف ± ف) دالة فردية ، (ز ± ف) دالة ليست زوجية ولا فردية

مثــ١٨ــال: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) د(س) = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ (ب) د(س) = $\text{س}^{٢}$ جا س + س

(جـ) د(س) = س جتا ٥س ظا س + $\text{جا}^{٢}$ س

الحـــل

(أ) د(ـ س) = $\frac{\text{جا (ـ س)}}{\text{ـ س}}$ = $\frac{\text{ـ جا س}}{\text{ـ س}}$ = $\frac{\text{جا س}}{\text{س}}$ = د(س) ∴ الدالة زوجية

(ب) د(ـ س) = $(\text{ـ س})^{٢}$ جا(ـ س) + (ـ س)

= $\text{س}^{٢}$ × (ـ جا س) ـ س = ـ $\text{س}^{٢}$ جا س ـ س

= ـ ($\text{س}^{٢}$ جا س + س) = ـ د(س) ∴ الدالة فردية

(جـ) د(- س) = (ـ س) جتا(ـ ٥س) ظا(ـ س) + $[\text{جا(ـ س)}]^{٢}$

= (ـ س) جتا ٥س (ـ ظا س) + $[\text{ـ جا س}]^{٢}$

= س جتا ٥س ظا س + $\text{جا}^{٢}$ س = د(س) ∴ الدالة زوجية

مثــ١٩ــال: ابحث نوع الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

(أ) د(س) = $\frac{\text{س}^{٣}\text{ جا ٣س}}{\text{١ + س}}$ (ب) د(س) = $\frac{٥}{٥^{\text{س}}}$ + ٥ × $(٥)^{\text{س}}$

(جـ) د(س) = $\left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ ـ س}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١ ـ س}}{\text{١ + س}}\right)^{٧}$

الحـــل

(أ) د(- س) = $\frac{(\text{ـ س})^{٣}\text{ جا (ـ ٣س)}}{\text{١ + (ـ س)}}$ = $\frac{\text{ـ س}^{٣}\text{ ×(ـ جا ٣س)}}{\text{١ ـ س}}$

= $\frac{\text{ـ س}^{٣}\text{ × جا ٣س}}{\text{١ ـ س}}$ ≠ د(س) ، د (ـ س) ≠ ـ د(س)

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية

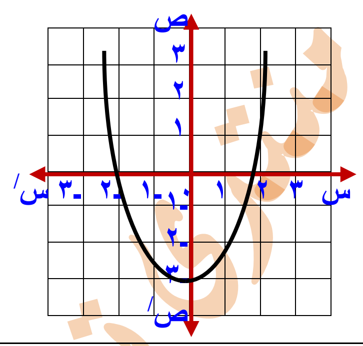
(ب) د(- س) = $\frac{٥}{(٥)^{\text{ـ س}}}$ + ٥ × $(٥)^{\text{ـ س}}$ = ٥ × $(٥)^{\text{س}}$ + $\frac{٥}{٥^{\text{س}}}$ = د(س)

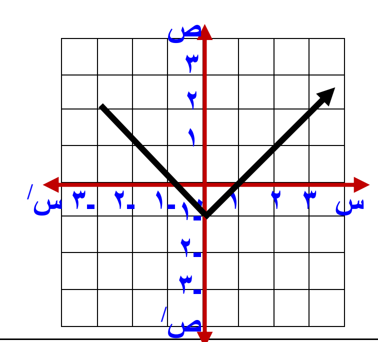
∵ د (س) = د (ـ س) ∴ الدالة زوجية

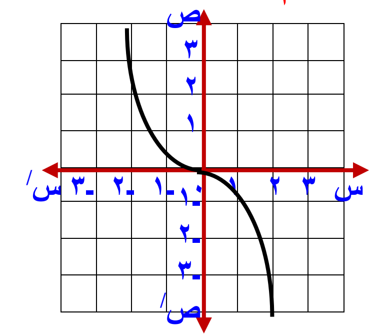
(جـ) د(- س) = $\left(\frac{\text{١ ـ(ـ س)}}{\text{١+(ـ س)}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١ +(ـ س)}}{\text{١ ـ(ـ س)}}\right)^{٧}$

= $\left(\frac{\text{١ + س}}{\text{١ ـ س}}\right)^{٧}$ + $\left(\frac{\text{١ ـ س}}{\text{١ + س}}\right)^{٧}$ = د(س) ∴ الدالة زوجية

مثـــ٢٠ــال :حدد من الرسم ما إذا كانت الدالة زوجية أم فردية أم غيرذلك





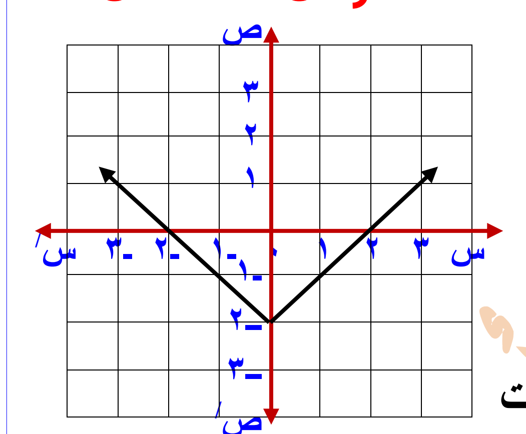


المجال = ح المنحنى متماثل حول محور الصادات ∴ الدالة زوجية	المجال =] ـ٣ ، ∞ [المنحنى ليس متماثل حول محور الصادات ولا حول نقطة الأصل ∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية	المجال = ح المنحنى متماثل حول نقطة الأصل ∴ الدالة فردية

مثـــ٢١ــال :ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) =
{ س ـ ٢ ، س ≥ ٠
{ ـ س ـ ٢ ، س < ٠

الحـــــــل

س ـ ٢ : س ≥ ٠				ـ س ـ ٢ : س< ٠			
س	٢	١	٠	س	(٠)	ـ١	ـ٢
د(س)	٠	ـ١	ـ٢	د(س)	(ـ٢)	ـ١	٠



المجال ح ، المدى = [٢ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى]-∞ ، ٠[، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [

وهى دالة زوجية لأن منحناها متماثل حول محور الصادات

مثـــ٢٢ــال :ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) =
{ س + ٣ ، س >٠
{ ٣ ، س ≤ ٠

الحـــــــل

س+٣ : س > ٠				٣ : س ≤ ٠			
س	٢	١	(٠)	س	٠	ـ١	ـ٢
د(س)	٥	٤	(٣)	د(س)	٣	٣	٣

المجال ح ، المدى = [٣ ، ∞ [

الأطراد: الدالة ثابتة فى]-∞ ، ٠]، متزايدة فى]٠ ، ∞ [

، الدالة ليست زوجية ولافردية

الدوال الأحادية :

تعريف : الدالة د : س ⟵ ص تسمى دالة أحادية إذا كان:

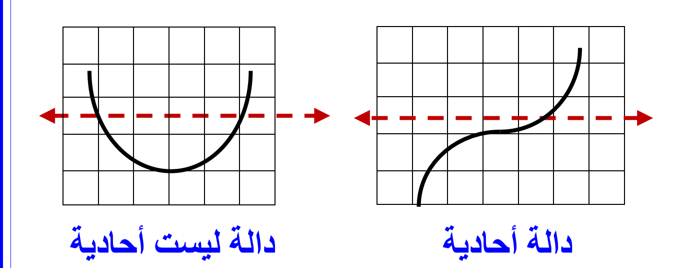
لكل ﻫ ، ب ∈ س ، د(ﻫ) = د(ب) فإن : ﻫ = ب

أ، لكل ﻫ ، ب ∈ س ، ﻫ ≠ ب فإن : د(ﻫ) ≠ د(ب)

يعنى أنه لا يوجد عنصران فى مجال الدالة الأحادية لهما نفس الصورة

اختبار الخط الأفقى

إذا وجد خط أفقى يقطع منحنى الدالة فى أكثر من نقطة فإن المنحنى لا يمثل دالة أحادية



ملاحظة: الدوال الزوجية بصفة عامة ليست دوال أحادية حيث د(ﻫ) = د(-ﻫ)

مثـــ٢٣ـــال:فى كل من الدوال حدد ما إذا كانت الدالة أحادية أم لا مع توضيح السبب

(أ) د(س) = ٣س + ١ (ب) د(س) = س^{٢} + ٥ (ﺟ) د(س) = $\frac{\text{٢س} - ٣}{\text{٣س} + ٢}$

الحـــل

(أ) بفرض : ﻫ ، ب ∈ مجال الدالة

∵ د(ﻫ) = ٣ﻫ +١ ، د(ب) = ٣ب +١ وبوضع د(ﻫ) = د(ب)

∴ ٣ ﻫ +١ = ٣ب +١ ⟸ ٣ ﻫ = ٣ب ∴ ﻫ = ب الدالة أحادية

(ب) بفرض : ﻫ ، ب ∈ مجال الدالة

∵ د(ﻫ) = ﻫ^{٢} +٥ ، د(ب) = ب^{٢} + ٥ وبوضع د(ﻫ) = د(ب)

∴ ﻫ^{٢} +٥ = ب^{٢} + ٥ ⟸ ﻫ^{٢} = ب^{٢} ∴ ﻫ = ± ب الدالة ليست أحادية

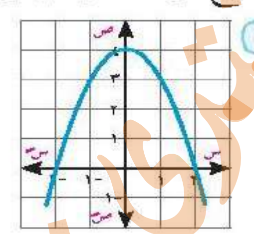
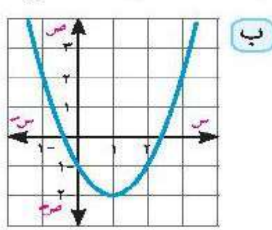
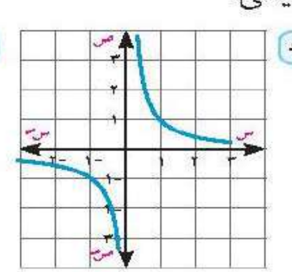
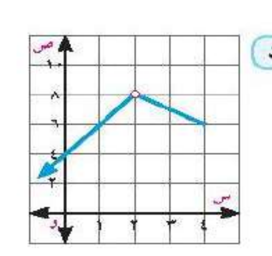
(ﺟ) بفرض : ﻫ ، ب ∈ مجال الدالة

∵ د(ﻫ) = $\frac{\text{٢ﻫ} - ٣}{\text{٣ﻫ} + ٢}$ ، د(ب) = $\frac{\text{٢ب} - ٣}{\text{٣ب} + ٢}$ وبوضع د(ﻫ) = د(ب)

∴ $\frac{\text{٢ﻫ} - ٣}{\text{٣ﻫ} + ٢}$ = $\frac{\text{٢ب} - ٣}{\text{٣ب} + ٢}$ ⟸ ٦ﻫب + ٤ﻫ - ٩ب - ٦ = ٦ﻫب - ٩ﻫ + ٤ب - ٦

⟸ ١٣ﻫ = ١٣ ب ∴ ﻫ = ب ∴ الدالة أحادية

تمـــــــارين

١	استنتج من الشكل البيانى مجال الدالة ومداها فى كل ممايأتى: أ  ب  جـ  د 
٢	إذا كانت د : [-٢ ، ٦] ⟵ ع د(س) = { ٤ - س عندما -٢ ⩽ س < ١ ؛ س عندما ١ ⩽ س ⩽ ٦ ارسم الشكل البياني للدالة د ، واستنتج من الرسم مدى الدالة وابحث اطرادها.
٣	باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من مايأتى ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها. أ د(س) = س^{٢} - ٥ ب د (س) = ٤ - س^{٢} جـ د(س) = (س -١)^{٢} + ١
٤	في كل من الدوال المعرفة كما يلى حدد ما إذا كانت الدالة المعطاة أحادية أم لا ، مع توضيح السبب. أ د(س) = ٣ س + ١ ب د (س) = $\frac{\text{٢س + ١}}{\text{س - ٢}}$ جـ د(س) = س^{٢} + ١
٥	إذا كانت د ، ر دالتين حقيقيتين حيث د(س) = (٣ - س)^{٢} ، ر(س) = (٣ + س)^{٢} بين أى الدوال الآتية فردية وأيها زوجية وأيها غير ذلك أ د + ر ب $\frac{\text{د}}{\text{ر}}$ جـ د . ر
٦	باستخدام أحد البرامج الرسومية ؛ ارسم منحنى الدالة د فى كل من مايأتى ، ومن الرسم استنتج مدى الدالة وابحث اطرادها. أ د (س) س^{٣} ب د(س) = س^{٣} - ٣س جـ د(س) $\frac{\text{-١}}{\text{س - ٢}}$
٧	ابحث نوع الدالة د من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك. أ د(س) = س^{٤} + س^{٢} - ١ ب د (س) = ٣ س - ٤ س^{٣} جـ د (س) = ٥ د د(س) = س^{٢} - ٣س هـ د (س) = $\frac{\text{س}^{٣}\text{ + ٢}}{\text{س - ٣}}$ و د(س) = س حتا س

التمثيل البيانى للدوال و التحويلات الهندسية

أولاً : دوال كثيرات الحدود

[١] الدالة الثابتة: الصورة العامة هى: د (س) = ٲ : ٲ ثابت

وتمثل بيانياً بمستقيم يوازى محور السينات

ويقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٲ)

كما فى الشكل

* مجاله = ع ، مداها = { ٲ }

الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

---

[٢] الدالة الخطية :أبسط صورة لدالة الدرجة الأولى هى:

• د : ع ⟵ ع ، د (س) = س وتمثل بيانياً

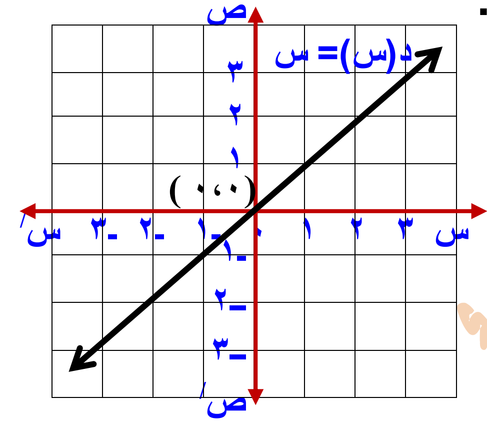
بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل (٠،٠) ميله = ١



* مجالها = ع ، مداها = ع

* الدالة تزايدية على مجالها ع

* الدالة فردية (متماثلة حول نقطة الأصل)



---

[٣] الدالة التربيعية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:

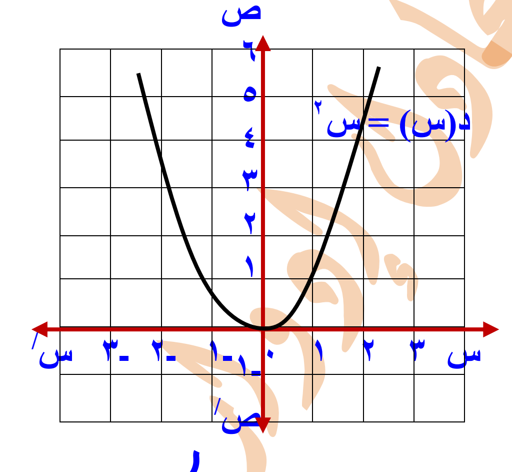
• د : ع ⟵ ع ، د (س) = $س^٢$

وتمثل بيانياً بمنحنى مفتوح لأعلى

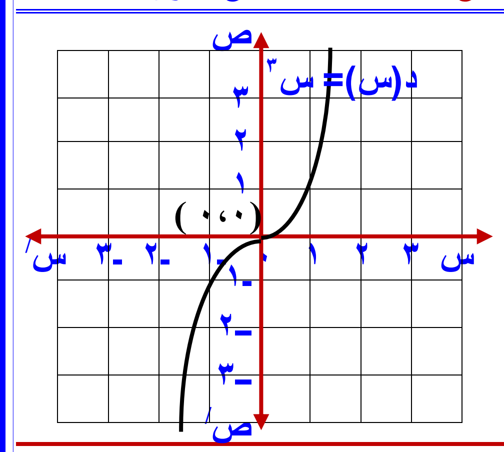
* مجالها = ع ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى]-∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠،∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)



[٤] الدالة التكعيبية : أبسط صورة للدالة التربيعيةهى:



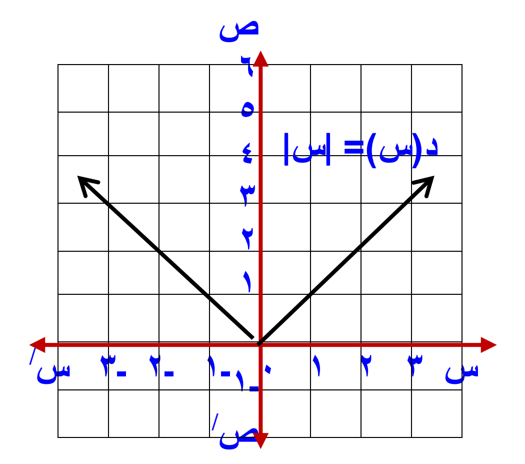
• د : ع ⟵ ع ، د (س) = س^٣ وتمثل بيانياً

بمنحنى متماثل حول نقطة الأصل (٠،٠) الدالة فردية

* مجال الدالة = ع ، مدى الدالة = ع

* ، تزايدية فى على مجالها ع

ثانياً : دالة المقياس



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ⟵ ع ، د (س) = | س |

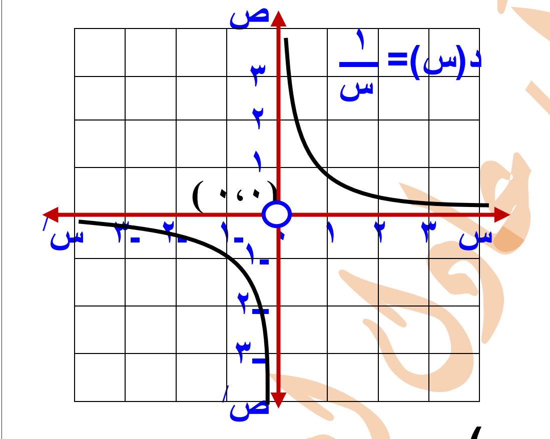
د (س) = { س : س ⩾ ٠ ، ـ س : س < ٠ }

* مجالها = ع ، مداها = [٠ ، ∞[

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠] ، تزايدية فى [٠، ∞[

* الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

ثانياً : الدالة الكسرية



أبسط صورة لدالة المقياس هى:

• د : ع ـ {٠} ⟵ ع ، د (س) = $\frac{١}{س}$

تمثل بمنحنى من جزئين أحداهما فى الربع الأول

والآخر فى الربع الثالث دون أن يقطعا المحورين

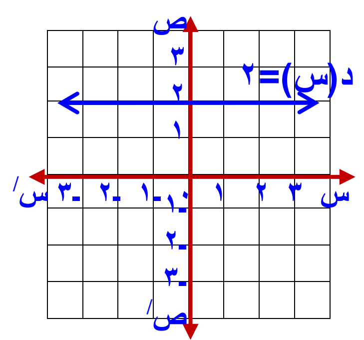
س⟷س/ , ص⟷ص/ ومتماثل حول نقطة الأصل (٠،٠)

* مجالها = ع ـ {٠} ، مداها = ع ـ {٠}

* الدالة تناقصية فى] ـ∞ ، ٠ [، تناقصية فى] ٠، ∞[

* الدالة فردية (متماثل حول نقطة الأصل)

مثــ١ــال: ارسم الدالة د(س) = ٢ ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

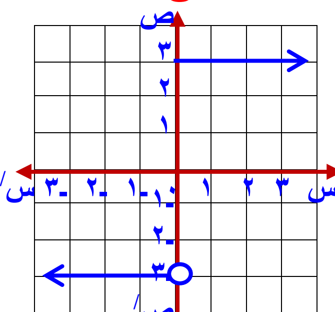


الحـــــــــل

المجال ع ، المدى = { ٢ }

الدالة ثابتة ، الدالة زوجية (متماثلة حول محور الصادات)

مثــ٢ــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { -٣ : س > ٠ ، ٣ : س ⩽ ٠ }



الحـــــــــل

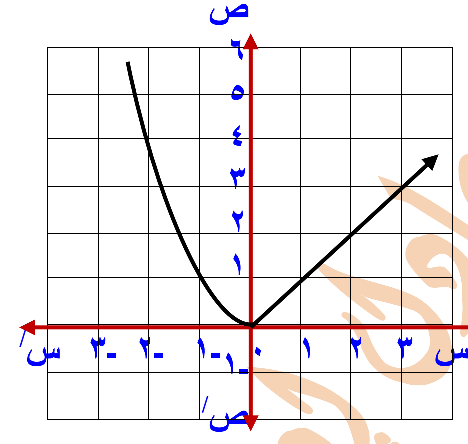
المجال ع ، المدى = {-٣ ، ٣ }

الدالة ثابتة فى] ـ ∞ ، ٠] ، فى] ٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثــ٣ــال: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س : س > ٠ ، س^{٢} : س ⩽ ٠ }

الحـــــــــل



الدالة معرفة بقاعدتين

د$_{١}$ (س) = س : س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة خطية

بخط مستقيم يمر بالنقطة(٠،٠) وميله = ١

د$_{٢}$ (س) = س^{٢} :س ∋] ـ ∞ ، ٠] يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

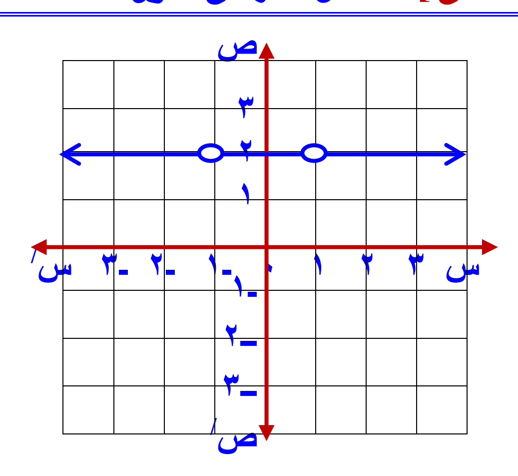
المجال ح ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية فى]- ∞ ، ٠[، الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثــ٤ــال: ارسم د(س) = $\frac{٢ س^٢ - ٢}{س^٢ - ١}$

حيث س ≠ ± ١ مع ذكر المجال والمدى واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :



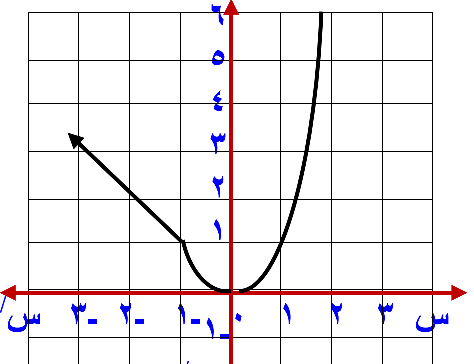
الحـــــــل

د(س) = $\frac{٢ (س^٢ - ١)}{(س^٢ - ١)}$ = $\frac{٢ (س - ١) (س + ١)}{(س - ١) (س +١)}$ = ٢

مجال د = ع - { -١ ، ١ }

مدىالدالة = { ٢ } ، الدالة زوجية

مثــ٥ــال:ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س^٣ : س > ١ ، |س| : س ≤ ١ }



الحـــــــل

الدالة معرفة بقاعدتين

$د_١$ (س) = س^٣ : س ∈] ١ ، ∞ [يمثلها دالة تكعيبية

$د_٢$ (س) = |س| : س ∈] - ∞ ، ١[

حسب تعريف دالة المقياس د(س) = - س

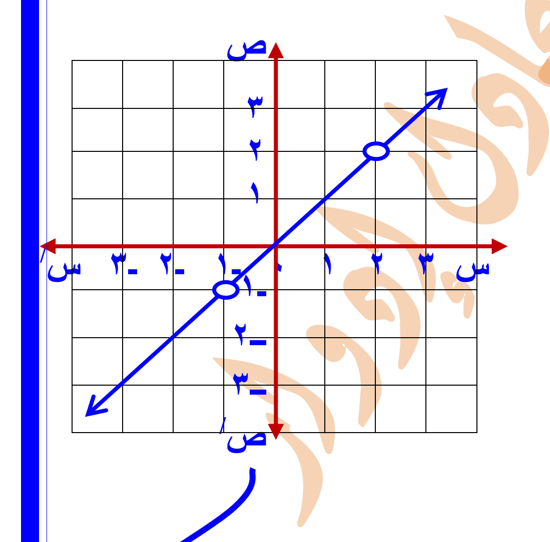
المجال ع ، المدى = [٠ ، ∞ [

الأطراد : الدالة تناقصية فى] - ∞ ،-١[، تناقصية فى]-١ ، ٠ [، تزايدية فى]٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثــ٦ــال: ارسم د(س) = $\frac{س^٣ - س^٢ + ٢س}{س^٢ - س +٢}$

: س ≠ ٢ ، -١ مبيناً المجال والمدى وابحث اطرادها



الحـــــــل

د(س) = $\frac{س (س - ٢) (س + ١)}{(س - ٢) (س +١)}$ = س

المجال = ع - { ٢ ، -١} ، المدى = ع - { ٢ ،-١}

د متزايدة على مجالها

الدالة ليست زوجية ولافردية

مثـــال ٧: ارسم الدالة الآتية ومن الرسم اذكر المدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك : د(س) = { س^{٢} : س > ٠ ، $\frac{١}{س}$: س < ٠ }

الحـــــــل

الدالة معرفة بقاعدتين

د$_{١}$ (س) = س^{٢} : س ∋] ٠ ، ∞ [يمثلها دالة تربيعية

بخط منحنى مفتوح لأعلى

د$_{٢}$ (س) = $\frac{١}{س}$: س ∋] ـ ∞ ، ٠ [دالة كسرية

تمثل بمنحنى فى الربع الثالث دون أن يقطع المحورين

المجال ح ـ {٠} ، المدى = ح ـ {٠}

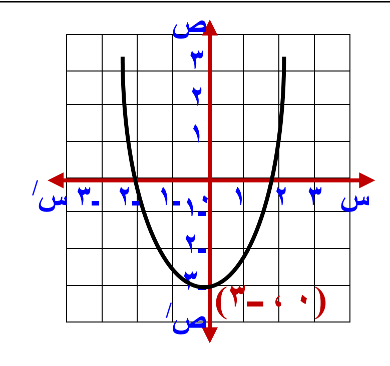
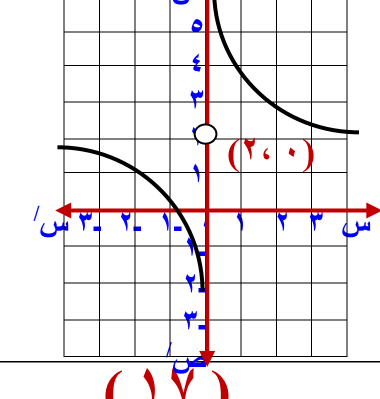
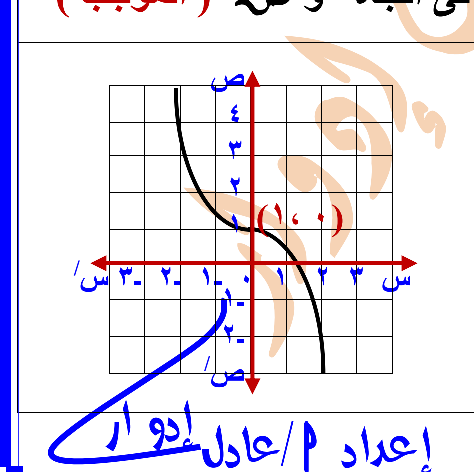
الأطراد : الدالة تناقصية فى] ـ ∞ ، ٠ [، الدالة تزايدية فى] ٠ ، ∞ [

الدالة ليست زوجية ولا فردية

التحويلات الهندسية لمنحنيات الدوال

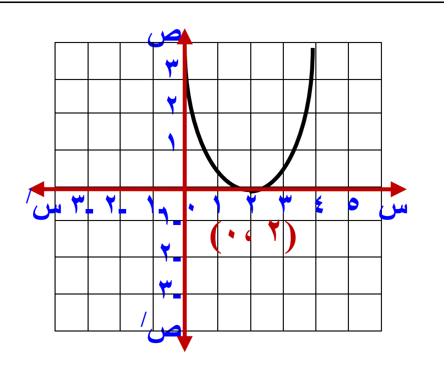
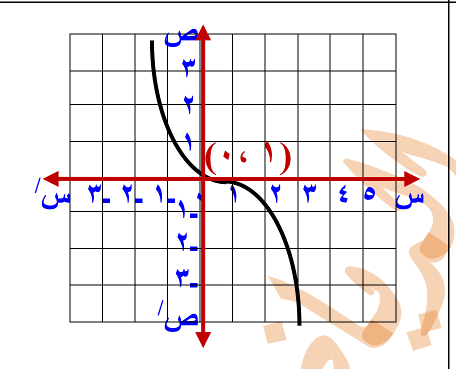
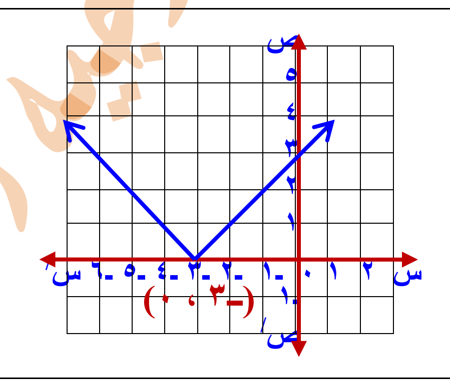
أولا : الإزاحة الرأسية لمنحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س) + أ ، أ ∋ ح ـ {٠} هو نفس المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها |أ| فى اتجاه : { و ص→ : أ > ٠ ، و ص′→ : أ < ٠ }

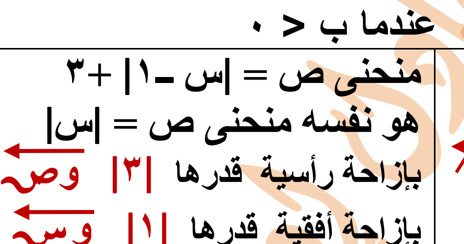
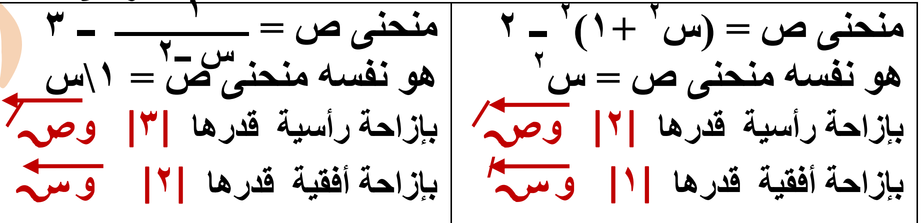
منحنى ص = س^{٢} ـ ٣ هو نفسه منحنى ص = س^{٢} بإزاحة رأسية قدرها ٣ فى اتجاه و ص′→ (السالب)	منحنى ص = ١\س ـ ٣ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها ٢ فى اتجاه و ص→ (الموجب)	منحنى ص = س^{٣} + ١ هو نفسه منحنى ص = س^{٣} بإزاحة رأسية قدرها ١ فى اتجاه و ص→ (الموجب)
		

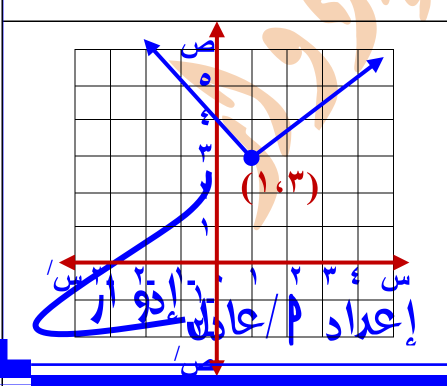
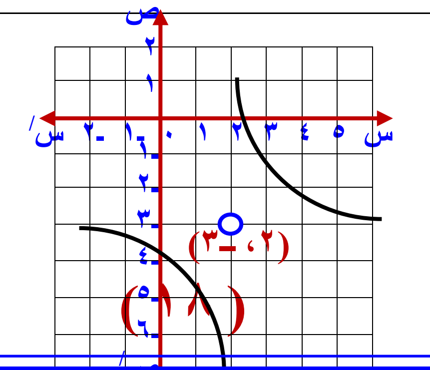
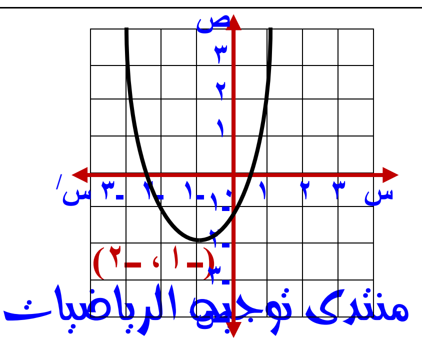
ثانيا : الإزاحة الأفقية لمنحنى الدالة

لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + ب) ، ب ∈ ع − {٠} هو نفس المنحنى
ص = د(س) بإزاحة أفقية قدرها | ب | فى اتجاه : و س← : ب > ٠ ، و س′← : ب < ٠

منحنى ص = (س ـ ٢)^{٢} هو نفسه منحنى ص = س^{٢} بإزاحة أفقية قدرها ٢ فى اتجاه و س (الموجب)	منحنى ص = (س ـ ١)^{٣} هو نفسه منحنى ص = س^{٣} بإزاحة أفقية قدرها ١ فى اتجاه و س (الموجب)	منحنى ص = | س+٣ | هو نفسه منحنى ص = | س | بإزاحة أفقية قدرها ٣ فى اتجاه و س′ (السالب)
		
نقطة تماثل (٢ ، ٠) ، المدى [٠، ∞ [الاطراد: تناقصية فى] ـ ∞ ، ٢[تزايدية فى]٢ ، ∞[	نقطة تماثل (١ ، ٠) ، المدى = ع الدالة تناقصية على مجالها	نقطة تماثل (ـ٣، ٠) ، المدى [٠، ∞ [الاطراد: تناقصية فى] ـ ∞ ، ٠[تزايدية فى]٠ ، ∞[

ثالثا : لأى دالة د يكون المنحنى ص = د(س + ٩) + ب ، ٩، ب ∈ ع − {٠} هو نفس
المنحنى ص = د(س) بإزاحة رأسية قدرها | ٩ | فى أتجاه و س← عندما ٩ > ٠ ، و س′← عندما ٩ < ٠
ثم إزاحة رأسية مقدارها | ب | فى اتجاه و ص↑ عندما ب > ٠ ، و ص′ عندما ب < ٠

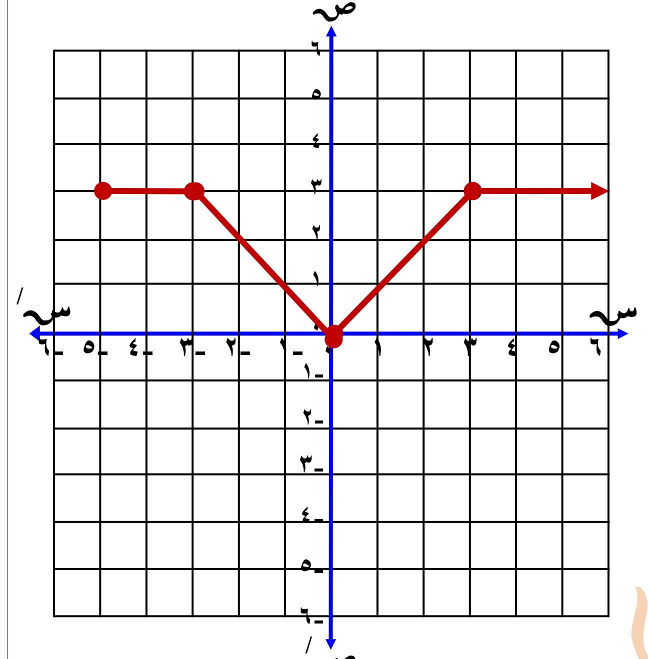
منحنى ص = |س ـ ١| + ٣ هو نفسه منحنى ص = |س| بإزاحة رأسية قدرها |٣| و ص بإزاحة أفقية قدرها |١| و س	منحنى ص = $\frac{١}{س ـ ٢}$ ـ ٣ هو نفسه منحنى ص = ١\س بإزاحة رأسية قدرها |٣| و ص′ بإزاحة أفقية قدرها |٢| و س	منحنى ص = (س + ١)^{٢} ـ ٢ هو نفسه منحنى ص = س^{٢} بإزاحة رأسية قدرها |٢| و ص′ بإزاحة أفقية قدرها |١| و س′
		

رابعا : لأى دالة د يكون المنحنى ص = ٢ د(س) حيث ٢ ∈ $ع^+$

- تمدد رأسى للمنحنى إذا كان ٢>١ ، أنكماش رأسى للمنحنى إذا كان ٢ <١

مثــ١ــال: ارسم الشكل البياني للدالة : د(س) = ⎨ ٣ ، -٥ ≤ س < -٣ ؛ |س| ، -٣ ≤ س ≤ ٣ ؛ ٣ ، س > ٣

مع ذكر المجال والمدى ، ابحث اطرادها وبين أنها دالة زوجية .



الحــــــل

$د_١$: دالة ثابتة د(س) = ٣ فى [-٥ ، -٣ [

$د_٢$: دالة مقياس د(س) = ⎨ س : ٠ ≤ س ≤ ٣ ؛ -س: -٣ ≤ س < ٠

$د_٣$: دالة ثابتة د(س) = ٣ فى]٣ ، ∞ [

المجال = [-٥ ، ∞[، المدى = [٠ ، ٣]

ثابتة فى [-٥ ، -٣[، د متناقصة فى]- ٣ ، ٠[

، تزايدية فى] ٠ ، ٣ [، ثابتة فى] ٣ ، ∞[

الدالة ليست زوجية وليست فردية

مثــ٢ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = ⎨ |س - ١| : س <١ ؛ $س^٢$ - ١ : س >١

اذكر المجال والمدى وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية ، وابحث اطرادها :

الحــــــل

$د_١$: دالة مقياس د = ⎨ س - ١ : س ∈] - ∞ ، ٠] ؛ -س - ١ : س ∈]٠ ، ١[

$د_٢$: دالة تربيعية بإزاحة مقدارها |١| فى اتجاه وس ←

المجال = ع - {١} ، المدى =] ٠ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى] - ∞ ، ٠[

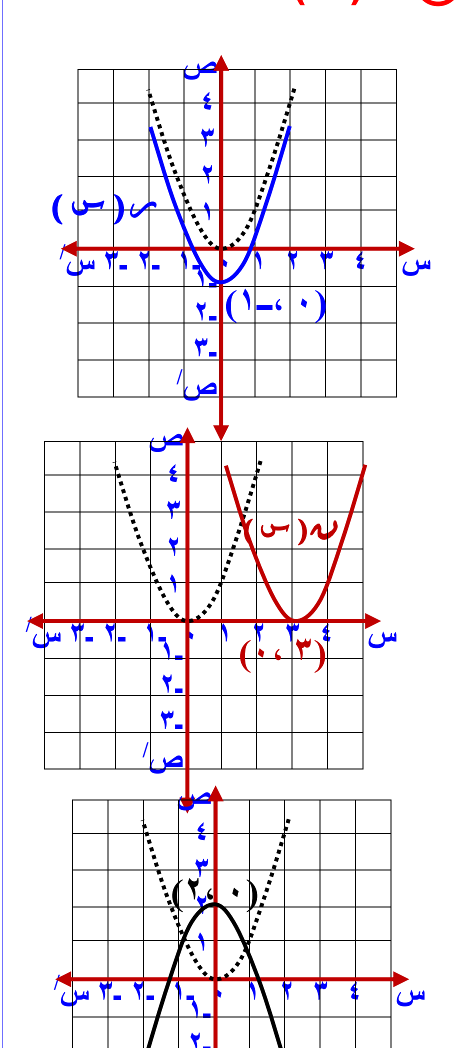
تتزايد فى] ١ ، ٠[، تتزايد فى] ١ ، ∞ [

مثـــ٣ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ر ، ن ، هـ حيث

(أ) ر(س) = س^{٢} ـ ١ (ب) ن(س) = (س ـ ٣)^{٢} (جـ) هـ(س) = ٢ ـ س^{٢}

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــــــل



(أ) ر(س) = س^{٢} ـ ١ إزاحة قدرها |١| فى اتجاه وص$^{/}$

رأس المنحنى (٠ ، ـ١) ، المدى = [ـ١ ، ∞ [

تناقصية] ـ∞ ، ٠ [، تزايدية] ٠ ، ∞ [

(ب) ن(س) = (س ـ ٣)^{٢} قدرها |٣| فى اتجاه وس

رأس المنحنى (٣ ، ٠) ، المدى = [٠ ، ∞ [

تناقصية] ـ∞ ، ٣ [، تزايدية] ٣ ، ∞ [

(جـ) هـ(س) = ٢ ـ س^{٢}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

وإزاحة قدرها |٢| فى اتجاه وص

رأس المنحنى (٠ ، ٢) ، المدى =] ـ ∞ ، ٢]

، الدالة تزايدية فى] ـ∞ ، ٠ [، تناقصية فى] ٠ ، ∞ [

مثـــ٤ـــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

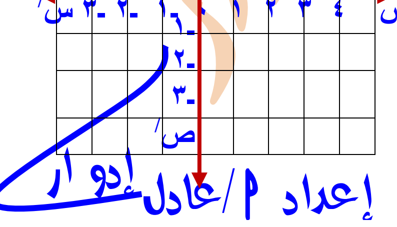
١) د$_{١}$ (س) = س^{٢} ٢) د$_{٢}$ (س) = ٢س^{٢} ٣) د$_{٣}$ (س) = $\frac{١}{٢}$ س^{٢}

الحـــــــــــــــل

جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)

، مجالها ع ، مداها = [٠ ، ∞ [، جميع الدوال زوجية

، جميعها متناقصة فى] ـ ∞ ، ٠ [، متزايدة فى] ٠ ، ∞ [



مثـــ٥ــال: ارسم فى شكل واحد منحنيات الدوال الآتية وعين مدى كل منها

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

١) $د_١$ (س) = س^٢ ٢) $د_٢$ (س) = ـ س^٢ ٣) $د_٣$ (س) = ـ٢ س^٢

الحـــــــــــــل

جميع الدوال نقطة رأس منحناها (٠ ، ٠)

، مجالها ع ، جميع الدوال زوجية

، $د_١$ مفتوح لأعلى مداها = [٠ ، ∞ [،

$د_٢$ مفتوح لأسفل مداها]-∞ ، ٠]

الدالة متزايدة فى]-∞ ، ٠[، متناقصة فى]٠ ، ∞[

$د_٣$ مفتوح لأسفل مداها]-∞ ، ٠]

الدالة متزايدة فى]-∞ ، ٠[، متناقصة فى] ٠ ، ∞[

مثـــ٦ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^٢ لتمثيل الدوال ر ، ىه ، ه حيث

Ⓐ ر(س) = س^٣ + ١ Ⓑ ىه(س) = (س ـ ٢)^٣ Ⓒ ه(س) = (س + ١)^٣ + ٢

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحـــــــــــــل

Ⓐ ر(س) = س^٣+١

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه و ص←

رأس المنحنى النقطة (٠، ١) ، المدى = ع

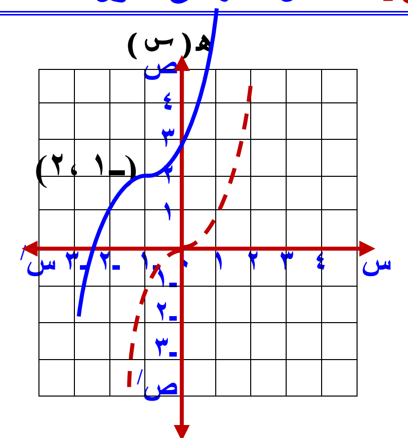
، الدالة تزايدية على مجالها

Ⓑ ىه(س) = (س ـ ٢)^٣

إزاحة قدرها |٢| فى اتجاه و س←

رأس المنحنى النقطة (٢ ، ٠) ، المدى = ع

، الدالة تزايدية على مجالها



ⓙ ر(س) = (س + ١)^{٣} + ٢

إزاحة |٢| فى اتجاه و س←/

وإزاحة |٢| فى اتجاه و ص←

رأس المنحنى النقطة (ـ١ ، ٢) ، المدى = ع

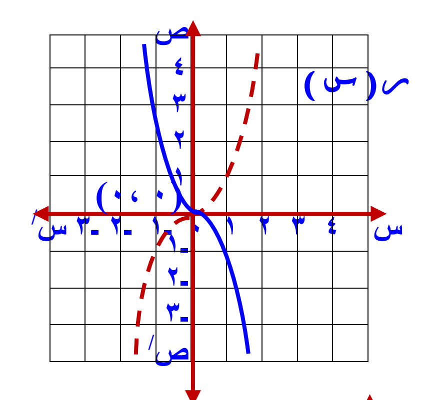
، الدالة تزايدية على مجالها

مثـــ٧ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س^{٢} لتمثيل الدوال ق ، ر ، هـ حيث

ⓐ ق(س) = ـ س^{٣} ⓑ ر(س) = ٢س^{٣} ـ ٢ ⓙ هـ(س) = ١ـ (س + ٢)^{٣}

ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها

الحــــــــــل



ⓐ ق(س) = ـ س^{٣}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

رأس المنحنى النقطة (٠ ، ٠) ، المدى = ع

، الدالة تناقصية على مجالها

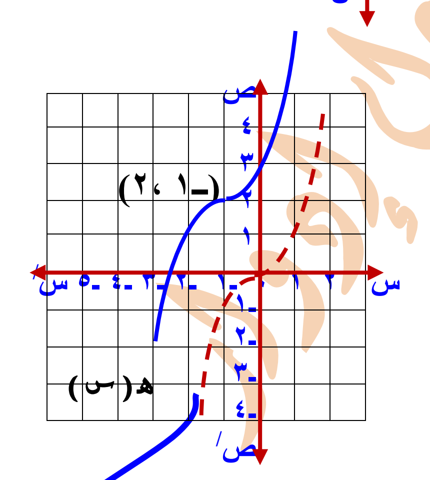
ⓑ ر(س) = ٢س^{٣} ـ ١

إزاحة قدرها |١| فى اتجاه و ص←/

يوجد تمدد فى الدالة

رأس المنحنى النقطة (٠ ، ـ ١) ، المدى = ع

، الدالة تزايدية على مجالها



ⓙ ر(س) = ١ـ (س + ٢)^{٣}

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

إزاحة |٢| فى اتجاه و س←/

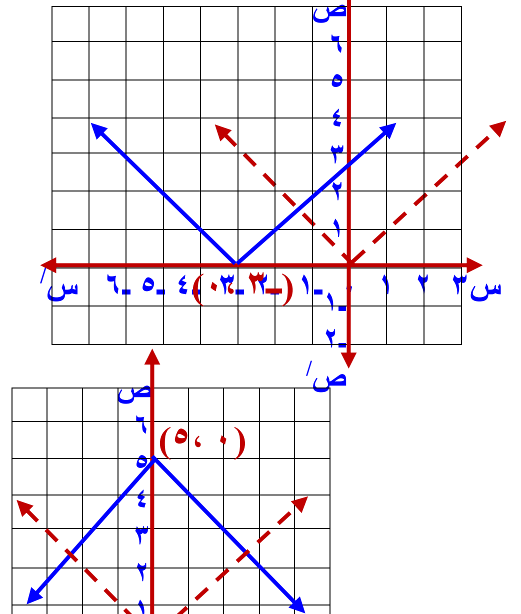
وإزاحة |١| فى اتجاه و ص←

رأس المنحنى النقطة (ـ٢ ، ١) ، المدى = ع

، الدالة تناقصية على مجالها

مثــ٨ــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ ر(س) = | س + ٣| ⓑ ر(س) = ٥ ـ | س|

الحـــــــل

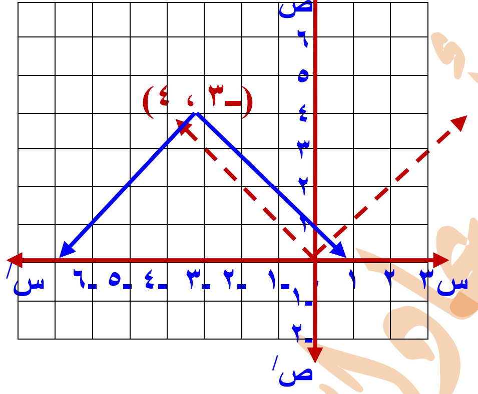


ⓐ ر (س) = | س + ٣| دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٣| فى اتجاه وس′

نقطة التماثل (ـ٣ ، ٠) مجال ع ، مدى [٠،∞[

تناقصية فى]ـ∞،ـ٣[، تزايدية فى]ـ٣،∞[



ⓑ ر (س) = ٥ ـ |س| دالة مقياس

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

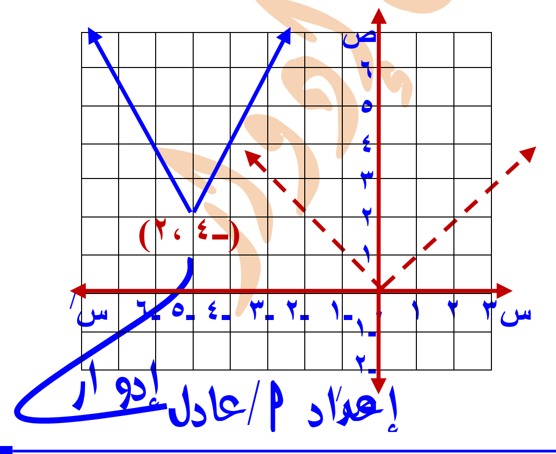
بإزاحة رأسية قدرها |٥| فى اتجاه وص′

نقطة التماثل (٠ ، ٥) مجال ع، مدى]ـ ∞ ، ٥]

الدالة تزايدية فى]ـ∞،٠[، تناقصية فى]٠،∞[

مثــ٩ــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم ومن الرسم حدد مجال ومدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ هـ(س) = ٤ ـ |س +٢| ⓑ ر(س) = |$\frac{١}{٢}$ س + ٤|+٢

الحـــــــل



ⓐ هـ (س) = ٤ ـ |س +٣| دالة مقياس

إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| فى اتجاه وص

بإزاحة أفقية قدرها |٣| فى اتجاه وس′

نقطة التماثل (ـ٣، ٤) مجال ع ، مدى]ـ∞ ، ٤)

تزايدية فى]ـ∞،٠[،]٠،∞[

ⓑ ر (س) = | س + ٣| دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٤| وس′ ، |٢| وص

نقطة التماثل (ـ٤ ، ٢) مجال ع ، مدى [٢،∞[

تناقصية فى]ـ∞،ـ٤[، تزايدية فى]ـ٤،∞[

مثـــ١٠ـــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = | س | أرسم الدوال الآتيةثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها ⓐ هـ(س) = ٤ ـ ٢ |س| ⓑ ر(س) = $\sqrt{س^2 + ٤س + ٤}$

الحـــــــل

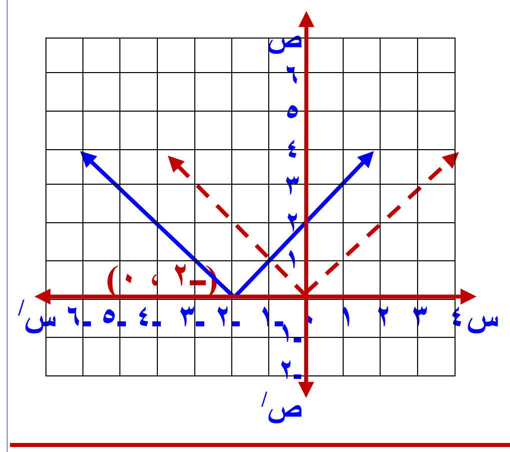
ⓐ هـ (س) = ٤ ـ ٢ |س| دالة مقياس

تمدد فى منحنى الدالة و إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

بإزاحة رأسية قدرها |٤| فى اتجاه $\overleftarrow{وص}$

نقطة التماثل (٤ ، ٠) مجال ع ، المدى] ـ ∞ ، ٤]

الدالة تزايدية فى] ـ∞، ٠ [، تناقصية فى] ٠، ∞[



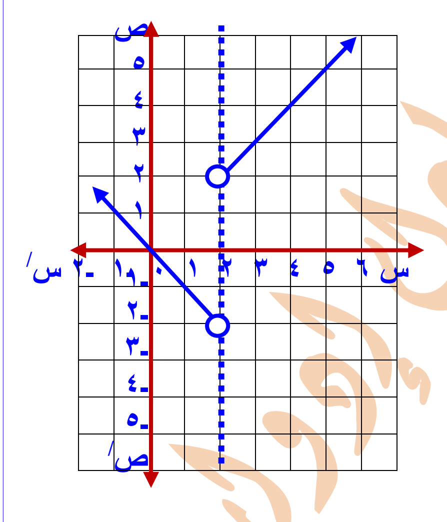
ⓑ ر (س) = $\sqrt{س^2 + ٤س + ٤}$ = $\sqrt{(س + ٢)^2}$

ر (س) = | س + ٢ | دالة مقياس

بإزاحة أفقية قدرها |٢| فى اتجاه $\overleftarrow{وس/}$

نقطة التماثل (ـ٢، ٠) مجال ع ، المدى [٠ ، ∞[

تزايدية فى] ـ∞،٠ [،] ٠،∞[



مثـــ١١ـــال: ارسم د(س) = $\frac{س^2 ـ س ـ ٢}{| س ـ ٢ |}$ حيث س ≠ ٢

ومن الرسم عين المدى وابحث الاطراد

الحـــــــل

د(س) = $\begin{cases} \frac{(س ـ ٢)(س + ١)}{(س ـ ٢)} & ، س > ٢ \\ \frac{(س ـ ٢)(س + ١)}{ـ (س ـ ٢)} & ، س < ٢ \end{cases}$

∴ د(س) = $\begin{cases} س + ١ & ، س > ٢ \\ ـ س - ١ & ، س < ٢ \end{cases}$

المجال = ع ـ {٢} ، المدى =]-٣ ، ∞ [

الدالة متناقصة فى]- ∞ ، ٢ [، متزايدة فى] ٢ ، ∞ [

مثــ١٢ــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتية ثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها Ⓐ ر(س) = $\frac{١}{س ـ ١}$ Ⓑ ى(س) = ($\frac{١}{س ـ ٢}$) ـ ٣

الحـــــــل

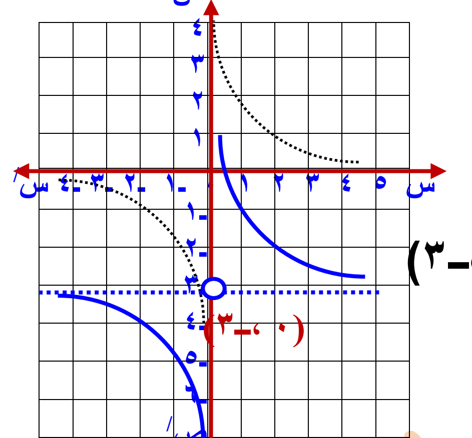
Ⓐ ر (س) = $\frac{١}{س ـ ١}$ دالة كسرية

بإزاحة أفقية قدرها |١| فى اتجاه وس←

نقطة التماثل النقطة (١ ، ٠)

مجال ع ـ {١} ، المدى ع ـ {٠}

تناقصية فى]ـ∞،١[، تناقصية فى]١،∞[



Ⓑ ى (س) = $\frac{١}{س}$ ـ ٣ دالة كسرية

بإزاحة رأسية قدرها |٣| فى اتجاه وص←

بإزاحة أفقية قدرها |٢| وس← نقطة التماثل (٢ ،ـ٣)

مجال ع ـ {٢} ، المدى ع ـ {ـ٣}

تناقصية فى]ـ∞،٢[، تناقصية فى]٢،∞[

مثــ١٣ــال: من رسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{١}{س}$ أرسم الدوال الآتية ثم حدد مدى الدالة وابحث اطرادها Ⓐ هـ(س) = $\frac{-١}{س}$ +٢ Ⓑ ى(س) = $\frac{١}{س ـ ٢}$ +٢

Ⓐ هـ (س) = $\frac{-١}{س}$ ـ ٢ دالة كسرية

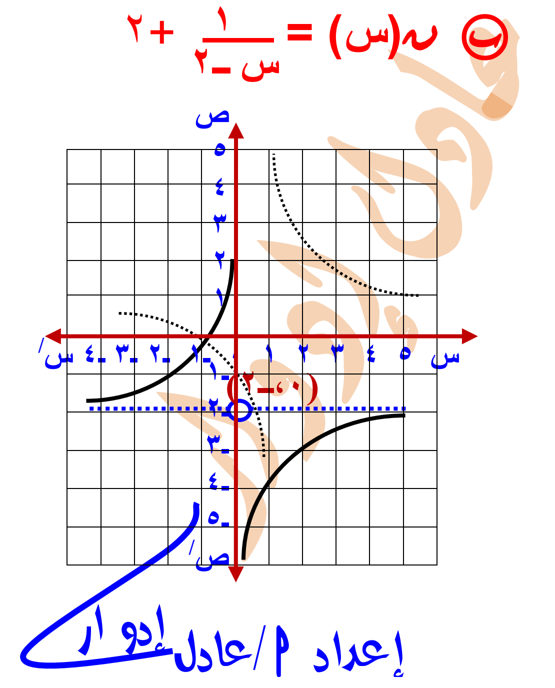
إنعكاس للدالة لوجود إشارة سالب

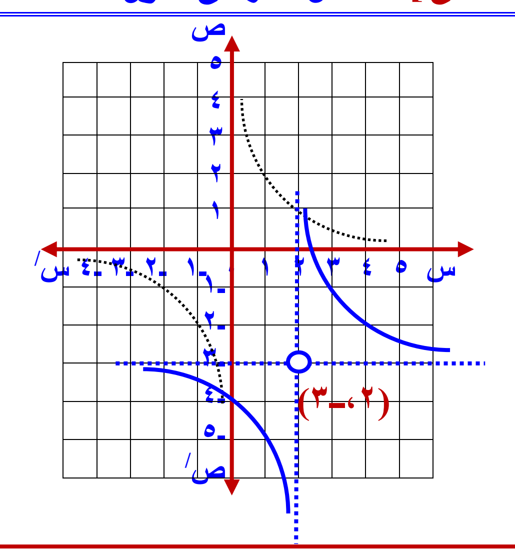
بإزاحة رأسية قدرها |٢| فى اتجاه وص←

نقطة التماثل (٠ ، ٢)

مجال ع ـ {٠} ، المدى ع ـ {٢}

تزايدية فى]ـ∞،٠[، تزايدية فى]٠،∞[





ⓑ ر (س) = ($\frac{١}{س - ٢}$) - ٣ دالة كسرية

بإزاحة رأسية قدرها |٣| فى اتجاه و ص/

بإزاحة أفقية قدرها |٢| فى اتجاه و س

نقطة التماثل (٢ ، -٣)

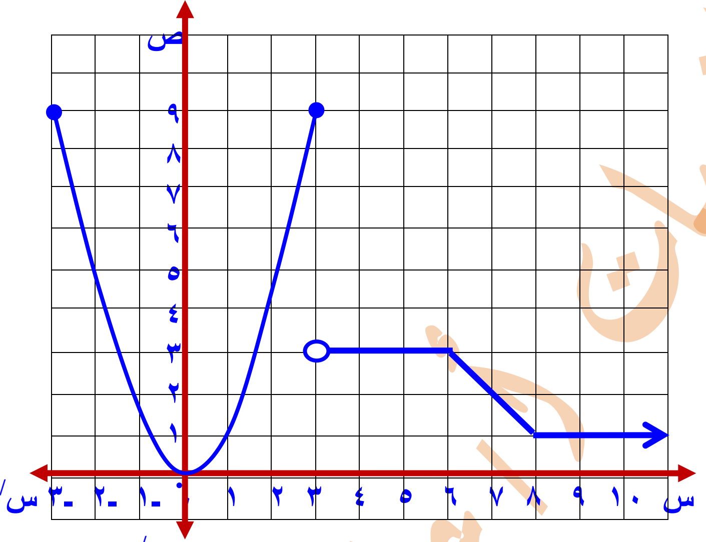
مجال ع - {٢} ، المدى ع - {-٣}

تناقصية فى]-∞،٢[، تناقصية فى]٢،∞[

مثــ١٤ــال: ارسم منحنى الدالة د(س) =
- $س^2$ عندما س ∈ [-٣ ، ٣ [
- ٣ عندما س ∈ [٣ ، ٦ [
- ٩- س عندما س ∈ [٦ ، ٨ [
- صفر عندما س >٨

ثم عين مدى الدالة واستنتج اطرادها

الحــــــــــل



من الرسم : مدى الدالة = [٠ ، ٩]

الدالة متناقصة فى [-٣ ، ٠ [،

الدالة متزايدة فى [٠ ، ٣ [

الدالة ثابتة فى [٣ ، ٦ [

الدالة متناقصة فى [٦ ، ٨ [

الدالة ثابتة فى [٨ ، ∞ [

مثــ١٥ــال: ابحث نوع د(س) = $س^3$ | س | من حيث كونها زوجية أو فردية

الحــــــــــل

د(-س) = $(-س)^3$ | -س | = $-س^3$ | س | = - د(س) ∴ الدالة فردية

مثــ١٦ــال:ابحث نوع د(س) | ٥+ س | + | ٥ - س | من حيث كونها زوجية أو فردية

الحــــــــــل

د(- س) = | ٥ - س | + | ٥+ س | = | ٥+ س | + | ٥ - س | = د(س) ∴الدالة زوجية

تمـــــــارين

١ ارسم منحنى الدالة د ، ومن الرسم حدد مداها وابحث اطرادها

أ د(س) = { |س| عندما س ⩽ ٠ ، س^٢ عندما س > ٠ }

ب د(س) = { ٤ عندما س < -٢ ، س^٢ عندما س ⩾ -٢ }

٢ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

منحنى ر(س) = س^٢ + ٤ هو نفس منحنى د(س) = س^٢ بازاحة مقدارها ٤ وحدات فى اتجاه:

أ و س ← ب و س ← ج و ص ← د و ص ←

نقطة رأس منحنى الدالة د(س) = (٢ - س)^٢ + ٣ هي:

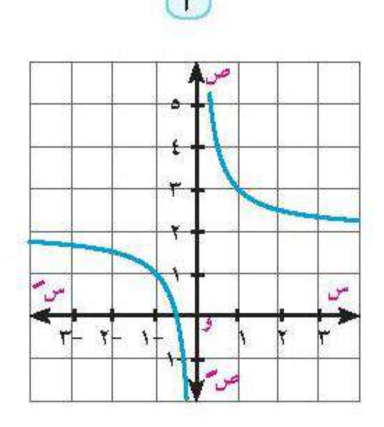
أ (٢، ٣) ب (٢، -٣) ج (-٢، ٣) د (-٢، -٣)

نقطة تماثل منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س - 3}$ + ٤ هى:

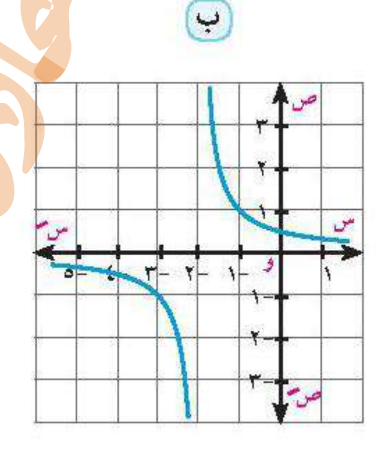
أ (٣، -٤) ب (-٣، -٤) ج (٣، ٤) د (-٣، ٤)

٣ رُسم منحنى الدالة د حيث د(س) = $\frac{1}{س}$، ثم أزيح فى اتجاه محورى الإحداثيات . اكتب قاعدة كل دالة التي تمثلها المنحنيات الآتية:

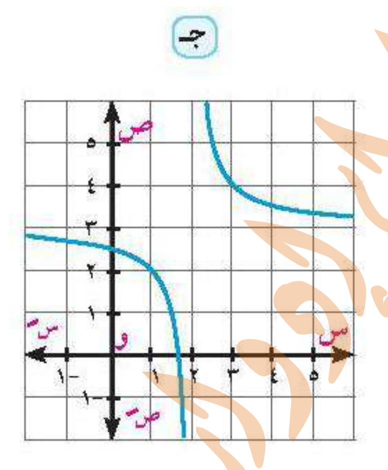
أ



ب



ج



٤ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^٢$ لتمثيل ما يأتي بيانيًا.

أ $د_١(س) = س^٢ - ٤$ ب $د_٢(س) = (س - ٣)^٢$ ج $د_٣(س) = (س - ١)^٢ - ٢$

٥ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^٣$. لتمثيل ما يأتي بيانيًا:

أ $د_١(س) = د(س) - ٣$ ب $د_٢(س) = د(س - ٢)$ ج $د_٣(س) = د(س + ٣) + ٢$

➢ ثم حدد نقطة التماثل لمنحنى كل دالة.

٦ إذا كانت الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ فارسم الشكل البيانى للدالة ق وحدد نقطة التماثل لمنحنى الدالة:

أ $ق(س) = د(س - ٣)$ ب $ق(س) = د(س) + ٢$ ج $ق(س) = د(س - ٢) + ٢$

٧ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل مايأتى بيانيًا.

أ $د_١(س) = ٢ - |س|$ ب $د_٢(س) = -|س + ٥|$ ج $د_٣(س) = ٤ - |س - ٢|$

د $د_٤(س) = ٢|س|$ هـ $د_٥(س) = -٢|س - ١|$ و $د_٦(س) = ٥ - ٢|س + ٢|$

٨ ارسم منحنى الدالة د فى كل ممايأتى باستخدام التحويلات المناسبة ثم ابحث اطرادها

أ $د_١(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢ & \text{عندما } س \geq ٠ \\ -س^٢ - ٢ & \text{عندما } س < ٠ \end{cases}$

ب $د_٢(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & \text{عندما } -٤ \leq س < ٠ \\ -س^٢ - ١ & \text{عندما } ٠ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

حل معادلات ومتباينات القيمة المطلقة

[١] حل معادلات القيمة المطلقة.

الطريقة البيانية: لحل المعادلة د(س) = ر(س) نرسم التمثيل البيانى (مجموعة الإحداثيات السينية) لنقط تقاطع منحنيا الدالتين د ، ر

خواص مقياس العدد :

- | س | ⩾ ٠ ، | س | = ٠ إذا وفقط إذا كان س=٠
- | س ص | = | س | × | ص | ، | س + ص | ⩽ | س | + | ص |
- | س | = | ـ س |
- فمثلاً | ٣ـ٢ س | = | ٢ س - ٣ |
- إذا كان | س | = ٥ فإن س = ± ٥
- إذا كان | س - ٣ | = | س + ١ | فإن س-٣ = ± (س+١)
- |س|^2 = س^2 ، $\sqrt{س^2}$ = | س |

مثــــال١: حل المعادلة | س+ ١ | = ٣ بيانياً وتحقق من الحل جبرياً

الحــــــــــل



الحل بيانياً: نمثل الدالة د(س) = |س + ١|
والدالة ر(س) =٣ وتحديد نقط تقاطع الدالتين
(٢ ، ٣) ، (ـ٤ ، ٣) ∴ م.ح = { - ٤ ، ٢ }

الحل الجبرى : | س+ ١ | = ٣ ⟸ (س +١)= ± ٣
⟸ س + ١ = ٣ أ، س + ١ = ـ٣
∴ س = ٣ ـ ١ =٢ أ، س = ـ٣ ـ ١ = ـ٤ ∴ م.ح = { - ٤ ، ٢ }

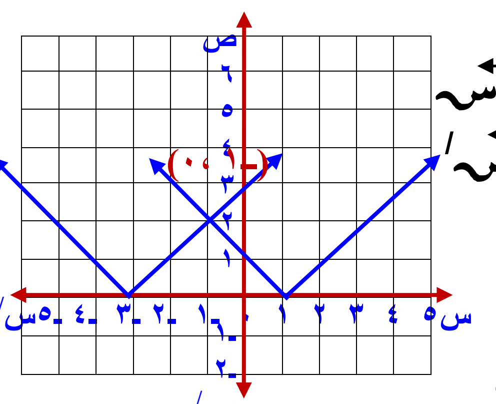
مثــــال٢: حل المعادلة | س + ٢ | + ٥ =٠

الحــــــــــل

| س+٢ | = ـ ٥ وهذا مرفوض ∴ م.ح = ∅

مثــ٣ــال: حل المعادلة | س ـ ١ | = | س + ٣ | بيانياً وتحقق من الحل جبرياً

الحـــــــــل



الدالة د(س) = | س ـ ١ | إزاحة أفقية |١| فى اتجاه وس

والدالة ر(س) = | س + ٣ | إزاحة أفقية |٣| فى اتجاه وس/

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (ـ١ ، ٠)

∴ م.ح = { ـ ٤ ، ٢ }

الحل الجبرى : | س ـ ١ | = | س + ٣ | بتربيع الطرفين

⇐ $س^٢$ ـ ٢ س + ١ = $س^٢$ + ٦س + ٩

⇐ ـ٢س ـ ١ = ٦س + ٩ ⇐ ـ ٨ س = ٨

∴ س = ـ١ ∴ م.ح = { ـ١ }

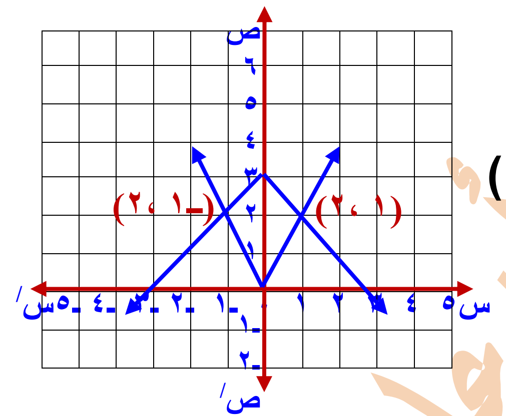
مثــ٤ــال: حل المعادلة ٣ ـ | س | = ٢ | س | بيانياً وتحقق من الحل جبرياً

الحـــــــــل

الدالة د(س) = ٣ ـ | س | إنعكاس فى منحنى الدالة

،إزاحة رأسية |٣| فى اتجاه وص

والدالة ر(س) = ٢ | س | إنكماش فى تمثيل المنحنى



من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (ـ١،٢) ، (١،٢)

∴ م.ح = { ـ ١ ، ١ }

الحل الجبرى : بإستخدام إعادة التعريف

المعادلة هى { ٣ ـ س = ٢س : س ≥ ٠ ، ٣ + س = ـ٢س : س < ٠ }

⇐ ٣ = ٣س أ، ٣ = ـ ٣س

⇐ س = ١ أ، س = ـ١ ∴ م.ح = { ـ١ ، ١ }

مثــ٥ــال: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : ٣ $\sqrt{س^٢}$ ـ ٢ | س | ـ ١ = ٠

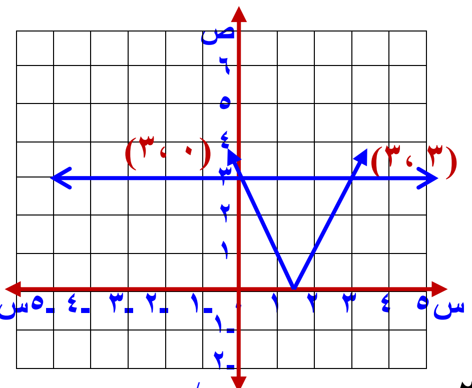
الحـــــــــل

٣ | س | ـ ٢ | س | ـ ١ = ٠ ∴ | س | = ١

∴ س = ± ١ ∴ م.ح = { ـ١ ، ١ }

مثـــ٦ـــال: حل المعادلة | ٢ س ـ ٣| = ٣ بيانياً وحقق الناتج جبرياً

الحـــــــــــل



الدالة د(س) = | ٢ س ـ ٣| إنكماش فى منحنى الدالة

إزاحة أفقية | $\frac{٣}{٢}$ | فى اتجاه و س←

والدالة ر(س) = ٣ دالة ثابتة توازى محور السينات

من الرسم نقطة التقاطع للدالتين هى (٣،٣) ، (٠،٣)

∴ م.ح = { ٣ ، ٠ }

الحل الجبرى: نضع المعادلة على الصورة : | ٢س ـ ٣| ـ٣ = ٠

نفرض أن د(س) = | ٢ س ـ ٣| ـ ٣

$$\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س}-٣-٣ & : \text{س} \geqslant \frac{٣}{٢} \\ -٢\text{س}+٣-٣ & : \text{س} < \frac{٣}{٢} \end{cases} = \begin{cases} ٢\text{س}-٦ & : \text{س} \geqslant \frac{٣}{٢} \\ -٢\text{س} & : \text{س} < \frac{٣}{٢} \end{cases}$$

عندما س ⩾ $\frac{٣}{٢}$ فإن: ٢س ـ ٦ = ٠ ∴ س = ٣ تحقق

وعندما س < $\frac{٣}{٢}$ فإن : ـ٢س = ٠ ∴ س = ٠ تحقق

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

حل جبرى آخر

∵ | ٢ س ـ ٣| = ٣ ∴ (٢س-٣) = ± ٣

إما: ٢س-٣ = ٣ ومنها ٢س = ٦ ومنها س = ٣ وهى تحقق المعادلة

أ،: ٢س-٣ = ـ٣ ومنها ٢س = ٠ ومنها س = ٠ وهى تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

حل جبرى ثالث

بتربيع الطرفين ∴ ٤س^{٢}-١٢س+٩ = ٩

∴ ٤س^{٢}-١٢س = ٠ ∴ ٤س(س -٣) = ٠

إما ٤س = ٠ ومنها س = ٠ وهى تحقق المعادلة

أ، س-٣ = ٠ ومنها س = ٣ وهى تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = {٠ ، ٣}

مثـــال٧: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : $\sqrt{س^٢}$ ـ ٢ | س | ـ ١ =٠

الحـــــــــــل

∵ $\sqrt{س^٢}$ = |س|

∴ | س |٢ـ ٥ | س | +٦ = ٠ ∴ (| س | ـ٢)(| س | ـ٣)=٠

إما | س | ـ٢=٠ ومنها | س | =٢ ومنها س= ±٢

أ، | س | ـ٣=٠ ومنها | س | =٣ ومنها س= ±٣

∴ مجموعة الحل = {ـ٢ ، ٢ ، ـ٣ ، ٣ }

مثـــال٨: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : $\sqrt{س^٢ ـ٦س + ٩}$ =٤

الحـــــــــــل

$\sqrt{س^٢ ـ٦س + ٩}$ =٤ ⟸ $\sqrt{(س ـ٣)^٢}$ =٤ وحيث $\sqrt{(س ـ٣)^٢}$ = | س ـ٣|

⟸ | س ـ٣| = ٤ ∴ (س ـ ٣) = ±٤

إما س ـ ٣=٤ ومنها س = ٧ تحقق المعادلة

أ، س ـ٣= ـ٤ ومنها س = ـ١ تحقق المعادلة

∴ مجموعة الحل = { ١ ، ٧ }

∴ مجموعة الحل = {ـ٢ ، ٢ ، ـ٣ ، ٣ }

مثـــال٩: أوجد الحل الجبرى للمعادلة : |س +١|٢ ـ ٣ |س +١| ـ١٠ = ٠

الحـــــــــــل

بالتحليل: (| س +١| +٢) (| س +١| ـ ٥) = ٠

ومنها | س +١| +٢ = ٠ أ، | س +١| ـ ٥ = ٠

⟸ | س +١| = ـ ٢ مرفوض أ، | س +١| = ٥

∴ س +١ =٥ عندما س ≤ ـ١ س = ٤ تحقق التعريف

أ، س +١ = ـ ٥ عندما س > ـ١ س = ـ٦ تحقق التعريف

∴ مجموعة الحل = { ٤ ، ـ ٦ }

٢] حل متباينات القيمة المطلقة.

الحل البيانى لمتباينة القيمة المطلقة

مثـــال: حل (أ) |س+ ١ | = ٣ ، (ب) |س+ ١ | < ٣ ، (جـ) |س+ ١ | > ٣ بيانياً

الحـــــــــــــل

(أ) نمثل الدالة د(س) = |س + ١|

والدالة ر(س) =٣ وتحديد نقط تقاطع الدالتين

(٢ ، ٣) ، (-٤ ، ٣) ∴ م.ح = { - ٤ ، ٢ }

(ب) حل المتباينة |س+ ١ | < ٣

هو] -٤ ، ٢ [

(جـ) حل المتباينة |س+ ١ | > ٣

هو]-∞ ، -٤[∪]٢ ، ∞[أو ح - [-٤ ، ٢]

ملاحظة هامة :

(ب) حل المتباينة |س+ ١ | ≤ ٣

هو [-٤ ، ٢]

(جـ) حل المتباينة |س+ ١ | ≥ ٣

هو]-∞ ، -٤] ∪ [٢ ، ∞[أو ح -] -٤ ، ٢ [

الحل الجبرى لمتباينة القيمة المطلقة

❖ إذا كان |س| < أ فإن - أ < س < أ ⇐ س ∈] - أ ، أ [

❖ إذا كان |س| > أ فإن س > أ ، س < - أ ⇐ س ∈ ح - [- أ ، أ]

❖ إذا كان |س| ≤ أ فإن - أ ≤ س ≤ أ ⇐ س ∈ [- أ ، أ]

❖ إذا كان |س| ≥ أ فإن س ≥ أ ، س ≤ - أ ⇐ س ∈ ح -] - أ ، أ [

مثـــ٢ـــال: حل المتباينة | س ـ ٣ | < ٥

الحـــــــــــل

القاعدة المستخدمة إذا كان | س | < م فإن ـ م < س < م ⟸ س ∈] ـ م ، م [

∵ |س ـ ٣ | < ٥ ∴ ـ ٥ < س ـ ٣ < ٥ بإضافة ٣ للمتباينة

∴ ـ ٢ < س < ٨

∴ س ∈] ـ٢ ، ٨ [

مثـــ٣ـــال : حل المتباينة | ٣ ـ ٢س | ⩽ ٧

الحـــــــــــل

القاعدة المستخدمة إذا كان : |س| ⩽ م فإن – م ⩽ س ⩽ م ⟸ س ∈ [– م ، م]

∵ | ٢س - ٣ | ⩽ ٧ ∴ ـ ٧ ⩽ ٢س ـ ٣ ⩽ ٧ بإضافة ٣ للمتباينة

∴ ـ٧+٣ ⩽ ٢س ⩽ ٧ + ٣

∴ ـ٤ ⩽ ٢س ⩽ ١٠

∴ ـ ٢ ⩽ س ⩽ ٥ ∴ س ∈ [-٢ ، ٥]

مثـــ٤ـــال: حل المتباينة | ٢ س + ١ | +٢ > ٧

الحـــــــــــل

القاعدة المستخدمة

إذا كان | س | > م فإن س > م ، س < ـ م ⟸ س ∈ ح ـ] ـ م ، م [

∵ | ٢ س + ١ | +٢ > ٧ ∴ | ٢ س + ١ | > ٥

∴ ٢ س + ١ > ٥ أ، ٢ س + ١ < ـ ٥ بطرح (١)

∴ ٢ س > ٤ أ، ٢ س < ـ ٦

∴ س > ٢ أ، س < ـ ٣

∴ حل المتباينة س ∈ ح ـ] ـ ٣ ، ٢ [

مثـــ٥ـــال: حل المتباينة | ٣ س + ٢ | +٥ > ٤

الحـــــــــــل

∵ | ٣ س + ٢ | +٥ > ٤ ∴ | ٣ س + ٢ | +٥ > -١ مرفوضة

∴ حل المتباينة هو ∅

مثـــ٦ـــال: حل المتباينة | ٣ س + ٢ | ⩾ ٧

الحـــــــــــل

القاعدة المستخدمة

إذا كان | س | ⩾ ٩ فإن س ⩾ ٩ ، س ⩽ -٩ ⟸ س ∈ ح -] -٩ ، ٩ [

∵ | ٣ س + ٢ | ⩾ ٧

∴ ٣ س + ٢ ⩾ ٧ أو ٣ س + ٢ ⩽ -٧ بطرح (٢)

∴ ٣ س ⩾ ٥ أو ٣ س ⩽ -٩

∴ س ⩾ $\frac{5}{3}$ أو س ⩽ -٣

(خط الأعداد: -٣ ، $\frac{5}{3}$ ، س ، س′)

∴ حل المتباينة س ∈ ح -] -٣ ، $\frac{5}{3}$ [

مثـــ٧ـــال: حل المتباينة | ٣ - س | ⩽ ٦

الحـــــــــــل

القاعدة المستخدمة إذا كان : | س | ⩽ ٩ فإن -٩ ⩽ س ⩽ ٩ ⟸ س ∈ [-٩ ، ٩]

∵ | ٣ - س | ⩽ ٦ ∴ -٦ ⩽ ٣ - س ⩽ ٦ بطرح ٣ المتباينة

∴ -٦ - ٣ ⩽ - س ⩽ ٦ - ٣

∴ -٩ ⩽ - س ⩽ ٣ بالضرب × (-١) نعكس المتباينة

∴ ٩ ⩾ س ⩾ -٣

(خط الأعداد: -٣ ، ٩ ، س ، س′)

∴ حل المتباينة س ∈ [-٣ ، ٩]

ملاحظة: ممكن المتباينة | ٣ - س | ⩽ ٦ تكتب | س - ٣ | ⩽ ٦

مثــ٨ــال: حل المتباينة √(٤س^٢ ـ ١٠س+٢٥) >١

الحــــــــــل

∵ √(س^٢ ـ ١٠س+٢٥) = √((س ـ ٥)^٢) = | س ـ ٥ | ⇐ المتباينة | س ـ ٥ | >١

القاعدة المستخدمة

إذا كان | س | > ﻫ فإن س > ﻫ ، س < ـ ﻫ ⇐ س ∈ ع ـ [ـ ﻫ ، ﻫ]

إما ٢س-٥>١ أ، ٢س-٥ < ـ ١ بجمع (٥) للمتباينة

∴ ٢ س > ٦ أ، ٢س < ٤ بالقسمة على (٢)

∴ س >٣ أ، س <٢

∴ س ∈ ع ـ [٢ ، ٣]

مثــ٩ــال: حل المتباينة | س ـ ٢ | + | ٤ ـ ٢س| ≤ ٦

الحــــــــــل

∵ | ٤ ـ ٢س| = ٢ | ٢ ـ س| = ٢ | س ـ ٢|

المتباينة | ٢ ـ س | + | ٤ ـ ٢س| ≤ ٦ تكتب ٣ |س ـ ٢ | ≤ ٦

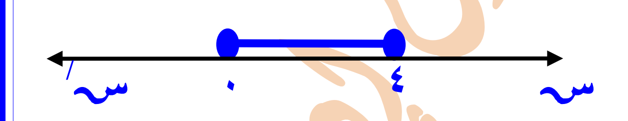
المتباينة تكون | س ـ ٢ | ≤ ٢

القاعدة المستخدمة إذا كان : |س | ≤ ﻫ فإن – ﻫ ≤ س ≤ ﻫ ⇐ س ∈ [– ﻫ ، ﻫ]

∵ |س - ٢ | ≤ ٢ ∴ ـ ٢ ≤ س ـ ٢ ≤ ٢ بجمع (٢) المتباينة

∴ صفر ≤ س ≤ ٤

∴ حل المتباينة س ∈ [٠ ، ٤]



تمـــــارين

أكمل ماياتى:

(١) مجموعة حل المعادلة |س| = $\frac{١}{٢}$ هى ....

(٢) مجموعة حل المعادلة |س| + ٣ = ٠ هى ....

(٣) مجموعة حل المتباينة |س − ٢| ⩽ ٠ هى ....

اختر من القائمة التالية مجموعة الحل المناسبة لكل معادلة أو متباينة ممايأتى:

(٤) | س − ٢ | = ٣

(٥) | س - ٢ | < ٣

(٦) | س − ٢ | > -٣

(٧) | س - ٢ | ⩽ ٣

(٨) | س -٢ | > ٣

(٩) | س - ٢ | = - ٣

(أ)] -١ ، ٥ [

(ب) ح

(جـ) {-١ ، ٥}

(د) ح - [-١ ، ٥]

(هـ) ϕ

(و) [-١ ، ٥]

أوجد جبريا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٠) | س + ٣ | = ٦

(١١) | ٢س - ٧ | = ٥

(١٢) | ٣ − ٢س | = ٧

(١٣) | س - ٣ | = | س +١|

(١٤) |٢س + ١ | = | س - ٣|

(١٥) $\sqrt{س^{٢} - ٢س + ١}$ = ٤

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١٦) | س + ٤ | = ٣

(١٧) | س - ١ | = | س+٣|

(١٨) | ٢ س - ٥ | = ٣

أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

(١٩) | س - ١ | < ٣

(٢٠) | س - ٢| ⩽ ٥

(٢١) | س+٣| > ٢

أوجد جبريًا مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية:

(٢٢) |٢س - ١| > ٣

(٢٣) | ٢ س + ٣| ⩽ ٧

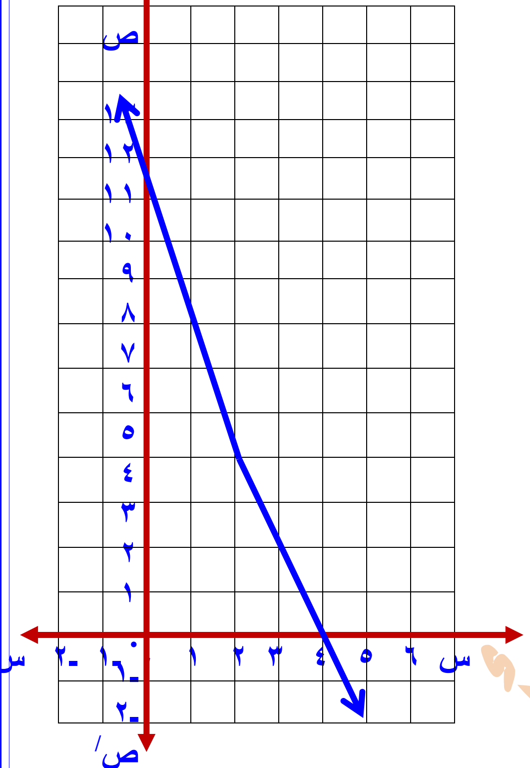
(٢٤) | ٣ س - ٧| ⩾ ٢

أمثلة عامة

مثـــ١ـــال: ارسم الشكل البياني للدالة د(س) = | س ـ ٢ | -٣س+١٠ واستنتج من الرسم المدى وابحث اطرادها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك واستنتج مجموعة حل المعادلة | س ـ ٢ | = ٣س-١٠ وحقق ذلك جبرياً :

الحـــــــل

د(س) = { س-٢-٣س+١٠ : س ⩾ ٢ ، - س+٢-٣س+١٠ : س < ٢ } = { ـ ٢س + ٨ : س ⩾ ٢ ، ـ ٤س +١٢ : س < ٢ }



المجال ع ، المدى ع ، د متناقصة على مجالها ،

الدالة ليست زوجية ولا فردية

المعادلة | س ـ ٢ | = ٣س-١٠

هى | س ـ ٢ | -٣س+١٠ = ٠

هى د(س) = ٠ ∴ مجموعة الحل = { ٤ }

الاحداثى السينى لتقاطع الدالة مع محور السينات

الحل الجبرى

ـ ٢س + ٨ = ٠ : س ⩾ ٢ ⟸ س = ٤ تحقق

ـ ٤س +١٢=٠ : س < ٢ ⟸ س = ٣ لا تحقق

∴ مجموعة الحل = {٤}

مثـــ٢ـــال: ارسم د(س) = ٢ | س ـ ٣ | +١ ومن الرسم استنتج المدى وابحث اطرادها واستنتج مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ وحقق ذلك جبرياً .

الحـــــــل

(س) = { ٢(س ـ ٣) + ١ : س ⩾ ٣ ، ٢(ـ س ـ٣) +١ : س < ٣ }

= { ٢س ـ ٦+ ١ = ٢س ـ٥ : س ⩾ ٣ ، ـ ٢س+٦+١ = ـ٢س +٧ : س < ٣ }

المدى = [١ ، ∞ [∴ مجموعة الحل = ∅

الدالة متناقصة فى] ـ ∞ ، ٣] ، و متزايدة فى [٣ ، ∞ [

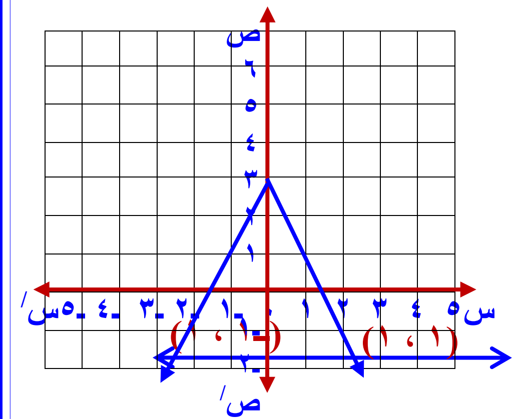
الحل الجبرى : د(س) = ٢س ـ ٥ = ٠ : س ⩾ ٣ ⇐ س = $\frac{٥}{٢}$ ⩾ ٣ لا تحقق

د(س) = ـ ٢س + ٧ = ٠ : س < ٣ ⇐ س = $\frac{٧}{٢}$ ⩽ ٣ لا تحقق

∴ مجموعة الحل = ∅

مثـــ٣ـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = ٣ ـ | ٢ س | واستنتج المدى وابحث اطرادها وأثبت أنها زوجية ، ثم أوجد حل Ⓐ ٣ ـ | ٢ س | = ١ Ⓑ ٣ ـ | ٢ س | ⩽ ١

الحـــــــــل



د(س) = { ٣-٢س ، س ⩾ ٠
٣+٢س ، س<٠ }

المدى =]- ∞ ، ٣]

د متزايدة فى]- ∞ ، ٠ [، متناقصة فى [٠ ، ∞ [

د زوجية لأن منحناها متماثل حول محور الصادات

Ⓐ نرسم د١ = -٣ | ٢ س | إزاحة رأسية مقدارها |٣| فى اتجاه $\overleftarrow{\text{وص}}$ وانكماش لمنحنى الدالة ونرسم د٢(س) = ١

ومن الرسم نجد نقط التقاطع للدالتين مجموعة الحل = { -١ ، ١ }

Ⓑ | ٢س| ⩾ ٢ ⇐ ٢س ⩾ ٢ أ، ٢س ⩽ ـ٢

∴ س ⩾ ١ أ، س ⩽ ـ١ ∴ س ∈ ع -] ـ١ ، ١ [

(خط أعداد: س/ ، -١ ، ١ ، س)

مثـــ٤ـــال: عين مجال د(س) = $\sqrt{٥ - | س - ١ |}$

الحـــــــــل

∵ ٥ـ|س ـ ١| ⩾ ٠ ∴ ـ |س ـ ١| ⩾ ـ ٥

∴ |س ـ ١| ⩽ ٥ ∴ ـ ٥ ⩽ س-١ ⩽ ٥

∴ ـ ٥+١ ⩽ س ⩽ ٥+١ ∴ -٤ ⩽ س ⩽ ٦

∴ -٤ ⩽ س ⩽ ٦ ∴ س ∈ [ـ ٤ ، ٦]

(خط أعداد: س/ ، -٤ ، ٦ ، س)

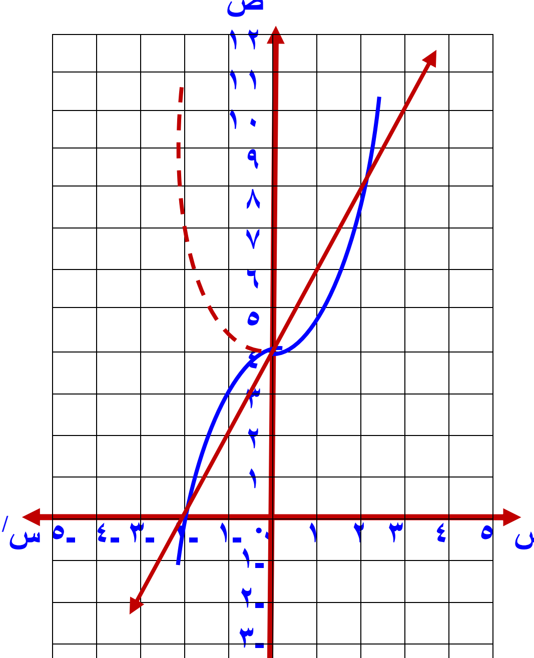
مثـــال: ارسم منحنى الدالة د(س) = س | س | +٤ ومن الرسم استنتج مدى الدالة واطرادها ، ثم حل المعادلة: س | س | +٤ = ٢(س+٢) بيانياً

الحـــــــــــــل

د(س) = { س^{٢} + ٤ : س ⩾ ٠ إزاحة رأسية مقدارها |٤| فى اتجاه و ص⃖
  { ـ س^{٢} + ٤ : س < ٠ انعكاس للمنحنى ،إزاحة |٤| فى اتجاه و ص⃖

المدى ع

د متزايدة على مجالها



الحل البيانى

نرسم د$_{١}$(س) = س | س | +٤

ونرسم د$_{٢}$(س) = ٢(س+٢)

ومن الرسم:الاحداثى السينى لنقط تقاطع الدالتين

مجموعة الحل = { -٢ ، ٠ ، ٢ }

مثال ارسم منحنى الدالة د(س) = $\frac{٣ س - ٢}{س - ١}$ واذكر المجال والمدى وابحث اطرادها واذكر نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

الحـــــــــــــل

د(س) = $\frac{(٣ س - ٣) - ٢ + ٣}{س - ١}$ = $\frac{٣(س - ١) + ١}{س - ١}$

د(س) = $\frac{١}{س - ١}$ + ٣

إزاحة أفقية |١| ورأسية |٣| نقطة التماثل (١ ، ٣)

المجال = ح - {١} ، المدى = ع - {٣}

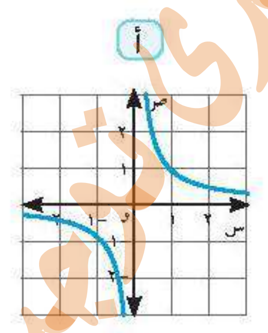
د متناقصة فى] - ∞ ،١[،] ١ ، ∞ [

الدالة لا فردية ولا زوجية

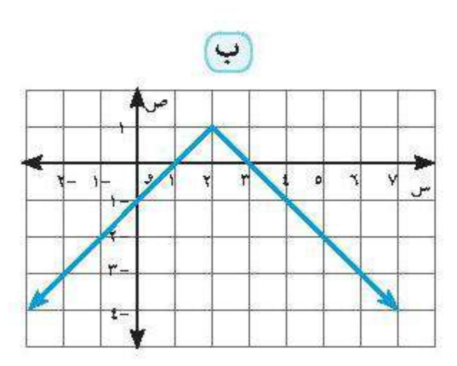
تمـــارين عامة على الوحدة

١ في كل من الأشكال البيانية الآتية عين مدى الدالة، وابحث اطرادها ثم بين نوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك:

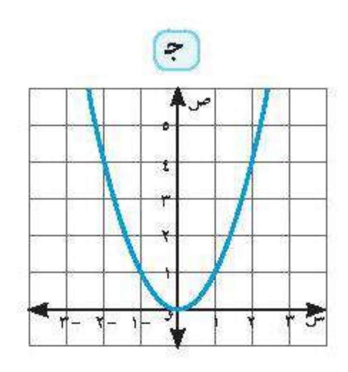
أ



ب



ج



٢ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

أ $د_1(س) = ٢س^٣ + س + ٣$ ب $د_2(س) = \frac{٢س}{س^٢ - ٢س - ٣}$ ج $د_3(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

٣ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = |س|$ لتمثيل الدالة ر بيانيًّا ثم ابحث اطرادها:

أ $ر(س) = |س| - ١$ ب $ر(س) = ٢ - |س|$ ج $ر(س) = |س + ٢| - ٣$

٤ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = س^٢$ لتمثيل مايأتي بيانيًّا:

أ $ر_1(س) = س^٢ - ٣$ ب $ر_2(س) = ٢ - س^٢$ ج $ر_3(س) = (س - ٢)^٢ + ١$

ثم أوجد معادلة محور التماثل لكل منها.

٥ استخدم منحنى الدالة د، حيث $د(س) = س^٣$ لتمثيل مايلي بيانيًّا:

أ $ر_1(س) = (س + ٣)^٣$ ب $ر_2(س) = -(س - ١)^٣$ ج $ر_3(س) = (س - ١)^٣ - ٢$

ثم عين نقطة تماثل منحنى الدالة .

٦ استخدم منحنى الدالة د حيث $د(س) = \frac{١}{س}$ ، $س \neq ٠$ لتمثيل ما يلي بيانيًّا:

أ $د_1(س) = \frac{١}{س} + ١$ ب $د_2(س) = \frac{١}{س} - ٢$ ج $د_3(س) = \frac{١}{س - ٢}$

٧ أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية بيانيًّا .

أ $|س - ٥| = ٣$ ب $|س - ٥| < ٣$ ج $|س + ٣| \geq ٢$

٨ أوجد مجموعة حل المعادلات والمتباينات الآتية جبريًّا:

أ $|س - ٣| = ٤$ ب $|٢س - ٣| = ٥$ ج $|٢س - ٥| \leq ٧$



الأسس واللوغاريتمات وتطبيقات عليها

- الأسس الكسرية
- الدالة الأسية وتطبيقتها
- المعادلات الأسية
- الدالة العكسية
- الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها البيانى
- بعض خواص اللوغاريتمات

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

الأسس الصحيحة

تعريف١ ∀ س ∈ ع ، ن ∈ ص$^+$ فإن :

س^{ن} = س × س × س × ... إلى ن من العوامل.

مثـال١ س^{١٥} = س × س × س × ... إلى ١٥ عوامل

تعريف٢ ∀ س ∈ ع* = ح – {٠} فإن س^{صفر} = ١

مثـال٢ (٣)^{صفر} = ١ ، (– ٢)^{صفر} = ١ ، - (١٣)^{صفر} = -١

تعريف٣ ∀ س ∈ ع – {٠} ، ن ∈ ص$^+$ فإن س$^{-ن}$ = $\frac{١}{س^{ن}}$

مثـال٣ س$^{-٥}$ = $\frac{١}{س^{٥}}$

قوانين الأسس الصحيحة.

∀ م ، ن ، ك ∈ ص فإن :

(١) س^{م} × س^{ن} = س$^{م+ن}$ ∀ س ∈ ع .

(٢) س^{م} ÷ س^{ن} = س$^{م-ن}$ ∀ س ∈ ع – {٠}.

(٣) (س^{م})^{ن} = س$^{م×ن}$ ∀ س ∈ ع.

(٤) (س^{م} × س^{ن})^{ك} = س^{مك} × س^{نك} ∀ س ، ص ∈ ع.

(٥) ($\frac{س^{م}}{س^{ن}}$)^{ك} = $\frac{س^{مك}}{س^{نك}}$ ∀ س ∈ ع ، ص ∈ ع – {٠}.

مثـال١: اختصر لأبسط صورة $\frac{(٦٤)^{٣} × (٢٧)^{٤}}{(١٤٤)^{٥}}$

الحـل

المقدار = $\frac{[(٢)^{٦}]^{٣} × [(٣)^{٣}]^{٤}}{[(٢)^{٤} × (٣)^{٢}]^{٥}}$ = $\frac{(٢)^{١٨} × (٣)^{١٢}}{(٢)^{٢٠} × (٣)^{١٠}}$ = $\frac{(٣)^{٢}}{(٢)^{٢}}$ = $\frac{٩}{٤}$

مثـــ٢ـــال: اختصر لأبسط صورة $\frac{(٤)^{٢ن+١} \times (٢)^{١-ن}}{(٨)^{ن+٢}}$

الحـــــــــل

المقدار = $\frac{[(٢)^{٢}]^{٢ن+١} \times (٢)^{١-ن}}{[(٢)^{٣}]^{ن+١}} = \frac{(٢)^{٤ن+٢} \times (٢)^{١-ن}}{(٢)^{٣ن+٣}}$

$= (٢)^{٤ن + ٢ + ١ - ن - ٣ن - ٣} = (٢)^{صفر} = ١$

مثـــ٣ـــال: اختصر لأبسط صورة $\frac{(١٢)^{٢} \times (٨١)^{-٢}}{١٦ \times (٢٧)^{-٣}}$

الحـــــــــل

المقدار = $\frac{[(٢)^{٢} \times ٣]^{٢} \times [(٣)^{٤}]^{-٢}}{(٢)^{٤} \times [(٣)^{٣}]^{-٣}} = \frac{(٢)^{٤} \times (٣)^{٢} \times (٣)^{-٨}}{(٢)^{٤} \times (٣)^{-٩}}$

$= (٣)^{٢ - ٨ + ٩} = (٣)^{٣} = ٢٧$

الجذر النونى : للعدد ٩ هو العملية العكسية لرفع هذا العدد للقوة (ن) ويرمز للجذر النونى للعدد ٩ بالرمز $\sqrt[ن]{٩}$ ويسمى ن دليل الجذر [$\sqrt[ن]{٩}$ = س إذا كان $س^{ن}$ = ٩]

ملاحظات:

المعادلة: $س^{ن}$ = ٩ لها ن من الجذور وإذا كان

(١) ن عدد زوجى ، ٩ > ٠ لها جذران حقيقيان أحدهما موجب والآخر سالب وباقى الجذور أعداد مركبة غير حقيقية (عندما: ن > ٢) [$\sqrt[٤]{٢٥}$ = ±٥]

(٢) ن عدد زوجى ، ٩ < ٠ ليس لها جذور حقيقية أى أن الجذور أعداد مركبة غير حقيقية [حل: $س^{٢}$ = ـ ٦٤ هو س = $\sqrt{±٦٤}$ = ± ٤ت]

(٣) ن عدد فردى ، ٩ ∈ ع ـ {٠} لها جذر حقيقى وحيد وباقى الجذور أعداد مركبة [حل: $س^{٣}$ = ـ ٢٧ هو س = $\sqrt[٣]{-٢٧}$ = ـ٣ وجزرين مركبين]

مثـــ٤ـــال: مجموعة حل المعادلة $(\text{س} - ٣)^{٧} = ١٢٨$ فى ح

الحــــل: ∴ $(\text{س} - ٣) = \sqrt[٧]{١٢٨} = ٢$ ⟸ $\text{س} - ٣ = ٢$ ∴ م.ح = {٥}

مثـــ٥ـــال: مجموعة حل المعادلة $٣\,\text{س}^{٤} - ٥ = ٢٣٩$ فى ح

الحــــل: $٣\,\text{س}^{٤} = ٢٣٩ + ٥ = ٢٤٣$ ⟸ $\text{س}^{٤} = ٢٤٣ \div ٣ = ٨١$

∴ $\text{س} = \sqrt[٤]{٨١} = \pm ٣$ ∴ م.ح = {-٣ ، ٣}

مثـــ٦ـــال: مجموعة حل المعادلة $\text{س}^{٣} = -٦٤$ فى ح

الحــــل: ∴ $\text{س} = \sqrt[٣]{-٦٤} = -٤$ ∴ م.ح = {-٤}

مثـــ٧ـــال: مجموعة حل المعادلة $\text{س}^{٤} = -٦٢٥$ فى ح

الحــــل: $-٦٢٥ < ٠$ ، القوة ٤ زوجى ∴ م.ح = ∅

الأسس الكسرية

تعريف ١ : $\text{س}^{\frac{١}{\text{ن}}} = \text{ص} \Leftarrow \text{س} = \text{ص}^{\text{ن}}$ حيث س ، ص ∈ ح$^{+}$ ويكون $\text{س}^{\frac{١}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}}$

فمثلاً: $(١٦)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{١٦} = ٤$ ، $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$ ، $(١٢٨)^{\frac{١}{٧}} = \sqrt[٧]{١٢٨} = ٢$

تعريف ٢ : إذا كان س ∈ ح$^{+}$ ، م ∈ ص ، ن عدد صحيح أكبر من الواحد.

فإن $\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = (\sqrt[\text{ن}]{\text{س}})^{\text{م}}$

ملاحظة: $\sqrt[\text{ن}]{\text{س}^{\text{م}}} = \sqrt[\text{نك}]{\text{س}^{\text{مك}}}$

فمثلاً: $(٨)^{\frac{٢}{٣}} = (\sqrt[٣]{٨})^{٢} = (٢)^{٢} = ٤$ ، $(٨١)^{-\frac{٣}{٤}} = (\sqrt[٤]{٨١})^{-٣} = (٣)^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

ملاحظات : * إذا كان أ ∈ ح$^{-}$: فإن $\text{أ}^{\frac{١}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \in$ ح إذا كان ن عدداً فردياً

$\text{أ}^{\frac{١}{\text{ن}}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{أ}} \notin$ ح إذا كان ن عدداً زوجياً

فمثلاً: $(-٢٥)^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{-٢٥} \notin$ ح ، $(-٢٧)^{\frac{١}{٣}} = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣ \in$ ح

* إذا كان $س^{\frac{ن}{}} = م$ فإن: $س = م^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد فردى
* إذا كان $س^{\frac{ن}{}} = م$ فإن: $س = \pm م^{\frac{ن}{م}}$ حيث م عدد زوجى

بشرط أن يكون م ، ن ليس بينهما عامل مشترك

استخدام المقياس : $\sqrt[ن]{م^ن} = |م|$ إذا كان ن عدد زوجى ، $\sqrt[ن]{م^ن} = م$ إذا كان ن عدد فردى

مثـــ١ــال : أوجد فى أبسط صورة

(أ) $\sqrt[٥]{(٢ - \sqrt{٥})^٥}$ (ب) $\sqrt[٤]{(٢ - \sqrt{٣})^٤}$ (جـ) $\sqrt[٦]{(١ - \sqrt{٧})^٦}$

الحـــــــــل

(أ) $\sqrt[٥]{(٢ - \sqrt{٥})^٥} = (٢ - \sqrt{٥})$: القوى عدداً فردياً

(ب) $\sqrt[٤]{(٢ - \sqrt{٣})^٤} = |٢ - \sqrt{٣}| = ٢ - \sqrt{٣}$: $٢ > \sqrt{٣}$

(جـ) $\sqrt[٦]{(١ - \sqrt{٧})^٦} = |١ - \sqrt{٧}| = \sqrt{٧} - ١$: $١ < \sqrt{٧}$

مثـــ٢ــال : أوجد فى أبسط صورة

(أ) $\sqrt[٥]{٣٢ م^٥ ب^{١٠}}$ (ب) $- \sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^{١٢}}$ (جـ) $\sqrt[٣]{(٧ + \frac{١}{٧})^٦}$

الحـــــــــل

(أ) $\sqrt[٥]{٣٢ م^٥ ب^{١٠}} = \sqrt[٥]{٣٢} \times \sqrt[٥]{م^٥} \times \sqrt[٥]{ب^{١٠}} = ٢ م ب^٢$

(ب) $- \sqrt[٤]{٨١ س^٤ ص^{١٢}} = - \sqrt[٤]{٨١} \times \sqrt[٤]{س^٤} \times \sqrt[٤]{ص^{١٢}} = - ٣ س ص^٣$

(جـ) $\sqrt[٣]{(٧ + \frac{١}{٧})^٦} = (٧ + \frac{١}{٧})^٢ = (٧)^٢ + ٢ + (\frac{١}{٧})^٢ = ٥١ + (\frac{١}{٧})^٢ = ٥١ \frac{١}{٤٩}$

مثـ٣ـال اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٢ م^٢ ب^{-٤})^٤ \times (٥ م ب^{-٧})^{-٢}}{(٤ م^{-٣} ب)^{-٢}}$

الحـــــــــل

المقدار $= \frac{٢^٤ \times م^٨ \times ب^{-١٦} \times ٥^{-٢} \times م^{-٢} \times ب^{١٤}}{(٢^٢)^{-٢} \times م^٦ \times ب^{-٢}}$

$= \frac{٢^٤ \times م^٨ \times ب^{-١٦} \times ٥^{-٢} \times م^{-٢} \times ب^{١٤}}{(٢)^{-٤} \times م^٦ \times ب^{-٢}}$

$= (٢)^{٤+٤} \times (٥)^{-٢} \times ٢^{٨-٢-٦} \times ب^{-١٦+١٤+٢} = \frac{٢٥٦}{٢٥} \times ٢^{٠} \times ب^{٠} = \frac{٢٥٦}{٢٥}$

مثـ٤ـال اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٦)^{٤ن} \times (٥)^{٧ن}}{(١٥)^{٤ن} \times (١٠)^{٣ن}}$

الحـــــــل

المقدار= $\frac{(٢ \times ٣)^{٤ن} \times (٥)^{٧ن}}{(٣ \times ٥)^{٤ن} \times (٢ \times ٥)^{٣ن}} = \frac{٢^{٤ن} \times ٣^{٤ن} \times ٥^{٧ن}}{٣^{٤ن} \times ٥^{٤ن} \times ٢^{٣ن} \times ٥^{٣ن}}$

$= (٥)^{٧ن-٥ن-٣ن} \times (٣)^{٤ن-٤ن} \times (٢)^{٤ن-٣ن} = (٥)^{٠} \times (٣)^{٠} \times (٢)^{ن} = (٢)^{ن}$

مثـ٥ـال اختصر لأبسط صورة : $\frac{(٢)^{١-٢ن} \times (٤٣٢)^{ن} \times ٣^{-ن}}{(٣)^{ن-٤} \times (١٢)^{ن-١}}$

الحـــــــل

المقدار= $\frac{(٢)^{١-٢ن} \times (٢^{٤} \times ٣^{٣})^{ن} \times ٣^{-ن}}{(٣)^{ن-٤} \times (٢^{٢} \times ٣)^{ن-١}}$

$= \frac{(٢)^{١-٢ن} \times ٢^{٤ن} \times ٣^{٣ن} \times ٣^{-ن}}{(٣)^{ن-٤} \times ٢^{٢ن-٢} \times ٣^{ن-١}}$

$= (٢)^{١-٢ن+٤ن-٢ن+٢} \times (٣)^{٣ن-ن-ن+٤-ن+١} = (٢)^{٣} \times (٣)^{٥}$

$= ٨ \times ٢٤٣ = ١٩٤٤$

مثـ٦ـال: أثبت أن : $\frac{(١٦)^{س-\frac{١}{٤}} \times (٩)^{س+\frac{١}{٢}}}{(٨)^{س-١} \times (١٨)^{س+٢}} = \frac{١}{٢٧}$

الحـــــــل

المقدار= $\frac{((٢)^{٤})^{س-\frac{١}{٤}} \times ((٣)^{٢})^{س+\frac{١}{٢}}}{((٢)^{٣})^{س-١} \times (٢\times(٣)^{٢})^{س+٢}} = \frac{(٢)^{٤س-١} \times (٣)^{٢س+١}}{(٢)^{٣س-٣} \times (٣)^{٢س+٤} \times (٢)^{س+٢}}$

$= (٢)^{٤س-١-٣س+٣-س-٢} \times (٣)^{٢س+١-٢س-٤} = (٢)^{٠} \times (٣)^{-٣} = \frac{١}{٢٧}$

مثـ٧ـال اختصر لأبسط صورة : $\frac{٥ \times (٣)^{٢س} - ٧\,(٣)^{٢س-١}}{(٣)^{٢س+٢} + (٣)^{٢س-١}}$

الحـــــــــــل

المقدار = $\frac{٥ \times (٣)^{٢س} - ٧\,(٣)^{٢س} \times (٣)^{-١}}{(٣)^{٢س} \times (٣)^{٢} + (٣)^{٢س} \times (٣)^{-١}} = \frac{(٣)^{٢س}\,(٥ - \frac{٧}{٣})}{(٣)^{٢س}\,(٩ + \frac{١}{٣})}$

بضرب البسط والمقام × ٣ ينتج = $\frac{١٥ - ٧}{٢٧ + ١} = \frac{٨}{٢٨} = \frac{٢}{٧}$

مثـ٨ـال اختصر: $(أ^{\frac{١}{٢}}\ ب^{\frac{١}{٣}})^{\frac{٤}{٣}} \times (ب^{-\frac{٤}{٢٧}}\ ج^{\frac{٢}{٣}})^{٣} \times (ج^{٢}\ أ^{\frac{٧}{٣}})^{-١}$

الحـــــــــــل

المقدار = $أ^{\frac{٢}{٣}}\ ب^{\frac{٤}{٩}} \times ب^{-\frac{٤}{٩}} \times ج^{٢} \times ج^{-٢}\ أ^{-\frac{٧}{٣}} = ب^{٠}\ ج^{٠}\ أ^{-\frac{٥}{٣}} = أ^{-\frac{٥}{٣}}$

مثـ٩ـال: أثبت أن : $(١٨)^{\frac{٣}{٢}} \times (٢٢٥)^{\frac{١}{٢}} \times (\frac{١}{١٢})^{\frac{١}{٢}} = \frac{٦}{٥}$

الحـــــــــــل

الطرف الأيمن = $(٢ \times (٣)^{٢})^{\frac{٣}{٢}} \times ((٣)^{٢} \times (٥)^{٢})^{-\frac{١}{٢}} \times ((٢)^{-١} \times (٣)^{-٢})^{\frac{١}{٢}}$

$= (٢)^{\frac{٣}{٢}} \times (٣)^{٣} \times (٣)^{-١} \times (٥)^{-١} \times (٢)^{-\frac{١}{٢}} \times (٣)^{-١}$

$= (٢)^{\frac{٣}{٢} - \frac{١}{٢}} \times (٣)^{٣-١-١} \times (٥)^{-١} = (٢)^{١} (٣)^{١} (٥)^{-١} = \frac{٦}{٥}$

مثـ١٠ـال رتب تصاعدياً $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt{٣}$ ، $\sqrt[٤]{٨}$

الحـــــــــــل

المضاعف المشترك الأدنى للأعداد ٣ ، ٢ ، ٤ هو ١٢ نحول الجذور للدليل ١٢

$\sqrt[٣]{٥} = \sqrt[١٢]{(٥)^{٤}} = \sqrt[١٢]{٦٢٥}$

$\sqrt{٣} = \sqrt[١٢]{(٣)^{٦}} = \sqrt[١٢]{٧٢٩}$

$\sqrt[4]{٨} = \sqrt[١٢]{(٨)^٣} = \sqrt[١٢]{٥١٢}$

الترتيب هو $\sqrt[١٢]{٥١٢}$ ، $\sqrt[١٢]{٦٢٥}$ ، $\sqrt[١٢]{٧٢٩}$ هو $\sqrt[4]{٨}$ ، $\sqrt[3]{٥}$ ، $\sqrt{٣}$

مثـ١١ـال حل المعادلة $س^٣ = ١٢٥$

الحـــــــــــل

$س = \sqrt[3]{١٢٥} = ((٥)^٣)^{\frac{١}{٣}} = ٥$ ∴ م.ح = { ٥ }

مثـ١٢ـال حل المعادلة : $\sqrt[3]{(س - ١)^٥} = ٣٢$

الحـــــــــــل

$(س - ١)^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢$ D $(س - ١) = [(٢)^٥]^{\frac{٣}{٥}} = (٢)^٣ = ٨$

∴ م.ح = { ٥ }

مثـ١٣ـال حل المعادلة : $س^{\frac{٤}{٣}} - ٥ س^{\frac{٢}{٣}} + ٤ = ٠$

الحـــــــــــل

$(س^{\frac{٢}{٣}} - ١) (س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $(س^{\frac{٢}{٣}} - ١) = ٠$ أ، $(س^{\frac{٢}{٣}} - ٤) = ٠$

∴ $س^{\frac{٢}{٣}} = ١$ ⟸ $س = (١)^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ س = ١

أ، $س^{\frac{٢}{٣}} = ٤$ ⟸ $س = [(٢)^٢]^{\frac{٣}{٢}}$ ∴ $س = (٢)^٣ = ٨$ ∴ م.ح = { ١ ، ٨ }

مثـ١٤ـال حل المعادلة $\sqrt[5]{١٦} \times (٤)^{س - \frac{١}{٥}} = ٢$

الحـــــــــــل

المعادلة $(٢^٤)^{\frac{١}{٥}} \times (٢^٢)^{س - \frac{١}{٥}} = ٢$

∴ $(٢)^{\frac{٤}{٥}} \times (٢)^{٢س - \frac{٢}{٥}} = ٢$

∴ $(٢)^{٢ س + \frac{٢}{٥}} = (٢)^١$ ∴ $٢س + \frac{٢}{٥} = ١$ ∴ $٢س = ١ - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥}$

بضرب كل من الطرفين × $\frac{١}{٢}$ ∴ $س = \frac{٣}{١٠}$

مثـ١٥ـال حل المعادلة $(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = (٨١)^{-\frac{١}{٤}}$

الحـــــــل

$(س - \frac{١}{٢})^{\frac{١}{٣}} = ((٣)^{٤})^{-\frac{١}{٤}} = (٣)^{-١}$

$\therefore (س - \frac{١}{٢}) = [(٣)^{-١}]^{٣} = (٣)^{-٣}$ $\therefore (س - \frac{١}{٢}) = \frac{١}{٢٧}$

$\therefore س = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢٧} = \frac{٢٩}{٥٤}$

مثـ١٦ـال إذا كان $س^{\frac{٣}{٤}} = ٢ ص^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ فأوجد قيمة: س - ١٠ ص

الحـــــــل

$س^{\frac{٣}{٤}} = ٦٤$ $\therefore (س)^{\frac{٣}{٤}} = (٢)^{٦} \Leftarrow س = [(٢)^{٦}]^{\frac{٤}{٣}} = (٢)^{٨} = ٢٥٦$

$٢ ص^{\frac{٥}{٣}} = ٦٤$ $\therefore ص^{\frac{٥}{٣}} = ٣٢ = (٢)^{٥}$ $\therefore ص = [(٢)^{٥}]^{\frac{٣}{٥}} = ٨$

$\therefore$ س - ١٠ص = ٢٥٦ - ١٠ × ٨ = ٢٥٦ - ٨٠ = ١٧٦

مثـ١٧ـال أختصر لأبسط صورة : $\frac{(٤٩)^{س٣ + \frac{١}{٤}} \times (\sqrt{١٦})^{س٣ - \frac{١}{٣}}}{(\sqrt[٣]{٤})^{س٩ - ١} \times (٣٤٣)^{س٢ + \frac{١}{٢}}}$

الحـــــــل

المقدار $= \frac{[(٧)^{٢}]^{س٣ + \frac{١}{٤}} \times [(٢)^{٢}]^{س٣ - \frac{١}{٣}}}{[(٢)^{\frac{٢}{٣}}]^{س٩ - ١} \times [(٧)^{٣}]^{س٢ + \frac{١}{٢}}} = \frac{(٧)^{س٦ + \frac{١}{٢}} \times (٢)^{س٦ - \frac{٢}{٣}}}{(٢)^{س٦ - \frac{٢}{٣}} \times (٧)^{س٦ + \frac{٣}{٢}}}$

$= (٧)^{س٦ + \frac{١}{٢} - س٦ - \frac{٣}{٢}} = (٧)^{-١} = \frac{١}{٧}$

مثـ١٨ـال أختصر لأبسط صورة :

$$\frac{(٦٢٥)^{\frac{\text{س}}{٤}} \times (٢٧)^{\text{س} - \frac{١}{٣}}}{(٢٢٥)^{\frac{٣}{٢}\text{س}} \times \sqrt{٢٥}}$$

الحـــــــــــل

$$\text{المقدار} = \frac{[(٥)^{٤}]^{\frac{\text{س}}{٤}} \times [(٣)^{٣}]^{\text{س} - \frac{١}{٣}}}{[(٣)^{٢} \times (٥)^{٢}]^{\frac{٣}{٢}\text{س}} \times ٥} = \frac{(٥)^{٣\text{س}} \times (٣)^{٣\text{س} - ١}}{(٣)^{٣\text{س}} \times (٥)^{٣\text{س}} \times ٥}$$

$$= (٣)^{٣\text{س} - ١ - ٣\text{س}} \times (٥)^{-١} = (٣)^{-١} \times (٥)^{-١} = \frac{١}{١٥}$$

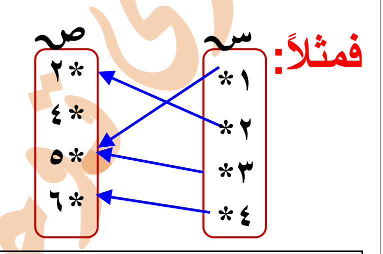
تمارين على المعادلات الأسية

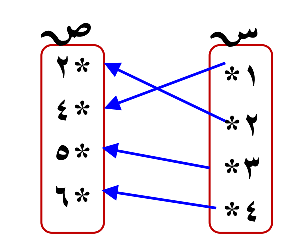
١	أوجد قيمة كلٍّ ممايأتى فى أبسط صورة: أ $(١٦)^{\frac{٣}{٤}}$ ب $(-٣٢)^{\frac{٣}{٥}}$ ج $٢٧^{-\frac{٤}{٣}}$ د $(\frac{١}{٨})^{\frac{٢}{٣}} + (\frac{١}{٤})^{\frac{١}{٢}}$ هـ $\frac{\sqrt[٤]{٤}}{\sqrt{٢}}$ و $\frac{١}{(٢^{-٢} \times ٤^{\frac{١}{٢}} \times ٨^{\frac{٢}{٣}})^{-٢}}$
٢	أوجد فى أبسط صورة ناتجَ العمليات لآتية: أ $(أ^{-\frac{٢}{٣}})^{-٣}$ ب $\sqrt[٣]{\text{س}} \times \text{س}^{\frac{١}{٣}}$ ج $(٣^{٢} + ٤^{٢})^{\frac{١}{٢}}$ د $(\text{س}^{\frac{١}{٢}} + \text{ص}^{\frac{١}{٢}})(\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \text{ص}^{\frac{١}{٢}})$ هـ $(\text{س}^{\frac{١}{٣}} - \text{ص}^{\frac{١}{٣}})(\text{س}^{\frac{٢}{٣}} + \text{س}^{\frac{١}{٣}}\text{ص}^{\frac{١}{٣}} + \text{ص}^{\frac{٢}{٣}})$
٣	اختصر كلًّا ممايأتى لأبسط صورة : أ $\sqrt[٥]{٢٤٣} + \sqrt[٩]{٥١٢}$ ب $(\frac{١٦}{٨١})^{\frac{١}{٤}} \times (\frac{٧٢٩}{٨})^{\frac{١}{٣}}$ ج $(١٦)^{\frac{٣}{٤}} \div (٨)^{\frac{٢}{٣}}$ د $(٢٧)^{\frac{٢}{٣}} - (٦٤)^{\frac{٥}{٦}}$ هـ $\sqrt{٠,١} \times \sqrt[٣]{٠,٢١٦} \times \sqrt{٢,٥}$ و $\frac{١٦^{\text{س} - \frac{١}{٤}} \times ٩^{\text{س} + \frac{١}{٢}}}{٨^{\text{س} - ١} \times ١٨^{\text{س} + ٢}}$

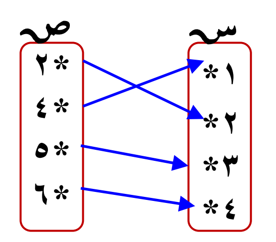
الدالة العكسية

إذا كانت د أحادية من س إلى ص فإن: الدالة $د^{-1}$ تسمى دالة عكسية للدالة د من ص إلى س إذا كان: لكل (أ ، ب) ∈ بين د فإن (ب ، أ) ∈ $د^{-1}$

فمثلاً:







د: س ⟵ ص ليست أحادية	الدالة د: س ⟵ ص لها $د^{-1}$ عكسية	$د^{-1}$: ص ⟵ س دالة عكسية للدالة د
لا يمكن إيجاد دالة عكسية لها	د={(١،٤)،(٢،٢) ، (٣،٥)، (٤،٦)}	$د^{-1}$={(٤،١)، (٢،٢) ، (٥،٣)، (٦،٤)}

مثـــ١ـــال: اى من الدوال الآتية لها دالة عكسية . ثم أوجد الدالة العكسية إن أمكن

(أ) $د_1$ = { (ـ٤ ، ١) ، (ـ٣ ، ٢) ، (١ ، ١) ، (٠ ، ٥)}

(ب) $د_2$ = { (ـ١ ، ٢) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٢)}

(جـ) $د_3$ = ٢س + ٥ : س = { ـ١ ، ١ ، ٣ }

الحـــــل

(أ) $د_1$ لها دالة عكسية ، $د_1^{-1}$ = {(١ ، ـ٤) ، (٢ ، ـ٣) ، (١ ، ١) ، (٥ ، ٠)}

(ب) $د_2$ ليس لها دالة عكسية :لأن العنصران ـ١ ، ٣ لهما نفس الصورة (الدالة غير أحادية)

(جـ) $د_3$ = { (ـ١ ، ٣) ، (١ ، ٧) ، (٣ ، ١١) } لها دالة عكسية

$د_3^{-1}$ = { (٣ ، ـ١) ، (٧ ، ١) ، (١١ ، ٣) }

ملاحظات:

(١) يمكن إيجاد قاعدة $د^{-1}$ مباشرة بتبديل المتغيرين س ، ص ثم إيجاد ص بدلالة س

فمثلاً : فى المثال السابق د = ص = ٢س + ٥ وبتبديل المتغيرين

س = ٢ص + ٥ ⟸ ٢ص = س ـ ٥ ∴ $د^{-1}$ = $\frac{١}{٢}$ (س ـ ٥)

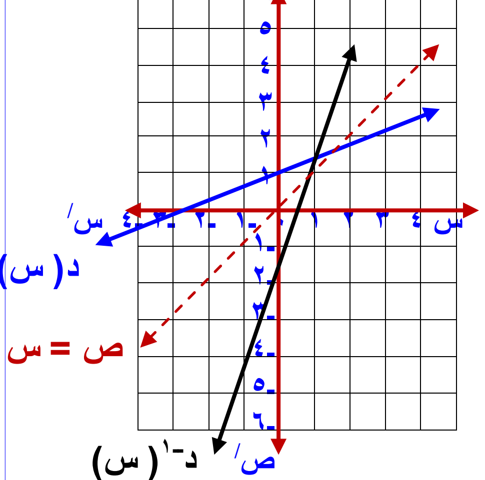
(٢) $د^{-1}$ (س) ≠ $\frac{١}{د(س)}$ حيث : $\frac{١}{٢}$ (س ـ ٥) ≠ $\frac{١}{٢س + ٥}$

مثـــ٢ـــال: أوجد الدالة العكسية للدالة د(س) = $\frac{١}{٢}$ س ـ ٣ ومثل الدالة ومعكوسها بيانياً فى شكل واحد

الحـــــــل

لإيجاد الدالة العكسية للدالة ص = $\frac{١}{٣}$ س + ١ بتبديل المتغيرين ⇐ س = $\frac{١}{٣}$ ص + ١

∴ $\frac{١}{٣}$ ص = س ـ ١ ∴ ص = ٣س ـ ٣ ∴ د$^{-١}$ (س) = ٣س ـ ٣



د(س) = $\frac{١}{٣}$ س + ١				د$^{-١}$ (س) = ٣س ـ ٣			
س	٣ـ	٠	٣	س	٠	١	٢
د(س)	٠	١	٢	د$^{-١}$(س)	٣ـ	٠	٣

نلاحظ : أن الدالة د(س) والدالة د$^{-١}$(س)

متماثلتان بالنسبة للمستقيم ص = س

أى: أن د ، د$^{-١}$ كلاً منهما صورة للأخرى بالانعكاس فى المستقيم ص = س

خواص الدالة العكسية.

(١) يقال إن د ، ر عكسية للأخرى إذا كان (د ○ ر) (س) = س ، (ر ○ د)(س) = س

(٢) مجال الدالة د = مدى الدالة العكسية د$^{-١}$ (س) ،

مدى الدالة د = مجال الدالة العكسية د$^{-١}$ (س)

مثـــ٣ـــال: حقق أن كلاً من : د ، ر حيث د(س) = ٢س ـ٣ ، ر(س) = $\frac{س + ٣}{٢}$ دالة عكسية للأخرى

الحـــــــل

∵ (د ○ ر) (س) = د (ر(س)) = د ($\frac{س + ٣}{٢}$) = ٢ ($\frac{س + ٣}{٢}$) ـ ٣ = س،

(ر ○ د) (س) = ر(د(س)) = ر (٢س ـ٣) = $\frac{٢س ـ ٣ + ٣}{٢}$ = س

∴ د ، ر دالة عكسية للأخرى

مثـــ٤ـــال: حقق أن كلاً من : د ، ر حيث د(س) = س^{٢} + ٤ : س ⩾ ٠ ،
ر(س) = $\sqrt{\text{س} - ٤}$ دالة عكسية للأخرى . ثم أوجد مجال ومدى كلاً منهما

الحـــــــل

∵ (د ○ ر) (س) = د (ر(س)) = د ($\sqrt{\text{س} - ٤}$) = (س ـ ٤ + ٤) = س،

(ر ○ د) (س) = ر(د(س)) = ر (س^{٢} + ٤) = $\sqrt{\text{س}^{٢} - ٤ + ٤}$ = $\sqrt{\text{س}^{٢}}$ = | س |

∵ س ⩾ ٠ ∴ (ر ○ د) (س) = س ∴ د ، ر دالة عكسية للأخرى

الدالة د(س) المجال] ٠ ، ∞ [والمدى لها =] ٤ ، ∞ [

الدالة ر (س) المجال] ٤ ، ∞ [والمدى لها =] ٠ ، ∞ [

مثـــ٥ـــال: إذا كانت الدالتين : د ، ر حيث : د(س) = ٢س + م ، ر(س) = ب س +٣
دالة عكسية للأخرى . فما قيمة كلاً من م ، ب ؟

الحـــــــل

∵ د (س) = ص = ٢ س + م بتبديل المتغيرين ∴ س = ٢ ص + م

⇐ ٢ص = س ـ م ⇐ ص = $\frac{\text{س}}{٢}$ ـ $\frac{\text{م}}{٢}$ ∴ د$^{-١}$(س) = $\frac{\text{س}}{٢}$ ـ $\frac{\text{م}}{٢}$

∵ ر(س) = د$^{-١}$(س) ∴ ب س +٣ = $\frac{\text{س}}{٢}$ ـ $\frac{\text{م}}{٢}$ ∴ ب = $\frac{١}{٢}$ ، م = ـ٦

تمارين على الدالة العكسية

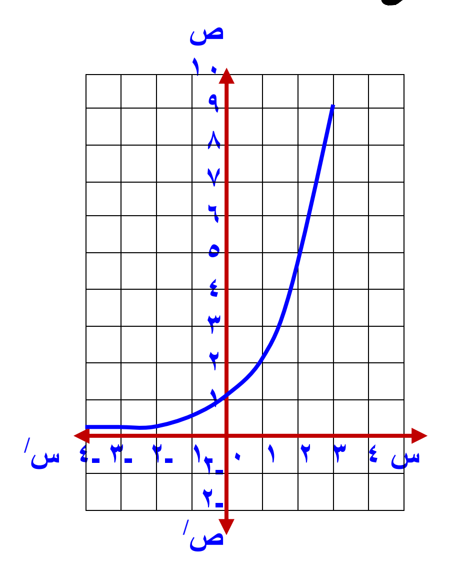
١	أ) إذا كانت الدالة د= {(١ ، ٤)، (٢ ، ـ٢)، (٣ ، ١)، (٤ ، ٠)} فإن د$^{-١}$ = ــــــــــ ب) صورة النقطة (٣ ، ١) بالانعكاس في المستقيم ص = س هي النقطة ــــــــــ جـ) إذا كانت د دالة أحادية وكان د(٣) = ٦ فإن د$^{-١}$ (٦) = ــــــــــ
٢	أوجد الدالة العكسية لكل من الدوال الآتية: أ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س + ٤ ب) د(س) = ٨ س^{٣} ـ ١
٣	في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية: أ) د(س) = س^{٢} ب) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س
٤	في كل مما يأتى عين المجال الذى يكون فيه للدالة د دالة عكسية: أ) د(س) = س^{٢} ب) د (س) = س^{٢} جـ) د(س) = $\frac{١}{٢}$ س

الدالة الأسية

تعريف. إذا كان $م \in ع^+ - \{١\}$ فإن الدالة د : ع ← ع$^+$ حيث د(س) = $م^س$
تسمى دالة أسية أساسها م .

التمثيل البيانى للدالة الأسية

إذا كانت: م عدداً حقيقياً موجباً ≠ ١ فإن الدالة د : ع ⟵ ع$^+$ حيث
د (س) = $م^س$ تسمى دالى أسية أساسها م



خواص الدالة الأسية

(١) إذا كانت : م > ١

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

المجال = ع

المدى = ع$_+$ أى] ٠ ، ∞ [

الدالة تزايدية على ع

الدالة ليست زوجية وليست فردية

المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات

(٢) إذا كانت: ٠ < م < ١

المنحنى يمر بالنقطة (٠ ، ١)

المجال = ع

المدى = ع$_+$ أى] ٠ ، ∞ [

الدالة تناقصية على ع

الدالة ليست زوجية وليست فردية

المنحنى يقع بكامله فوق محور السينات



ملاحظة: إذا كانت د(س) = $م^س$ فإن المنحنى ص = د (س + ب) أى ص = $م^{س + ب}$

يمثله ص = $م^س$ بإزاحة أفقية مقدارها | ب |

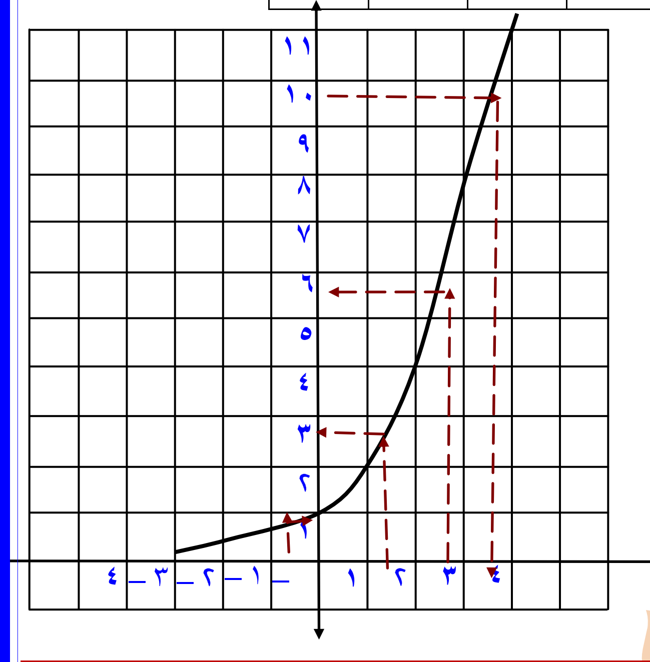
فى اتجاه و س إذا كان : ب < ٠ ، فى اتجاه و س/ إذا كان : ب > ٠

مثـــ١ـــال : أرسم منحنى الدالة د (س) = ٢ ^س^ في الفترة [ـ ٣ ، ٤] و من الرسم

أوجد : Ⓐ د (ـ٥,٠) Ⓑ د (٥,١) Ⓒ قيمة تقريبية للعدد √٣٢

الحـــــــــل

س	٤	٣	٢	١	٠	ـ١	ـ٢	ـ٣
ص	١٦	٨	٤	٢	١	$\frac{١}{\,}$	$\frac{١}{\,}$	$\frac{١}{\,}$



لإيجاد قيمة د (ـ ٠,٥) :

نرسم مستقيماً عند ـ٥,٠ يوازى محور الصادات

ليقابل المنحنى عند نقطة فنجدها ≃ ٠,٧

∴ د (ـ٥,٠) ≃ ٠,٧

لإيجاد قيمة د (١,٥) نرسم كما سبق

نجد أن : د (١,٥) ≃ ٢,٨

لإيجاد قيمة √٣٢ نلاحظ أن : ٣٢ = (٢)^٥^

∴ نوجد د ($\frac{٥}{٢}$) = د (٢ $\frac{١}{٢}$)

و نرسم كما فى السابق ∴ قيمة √٣٢ ≃ ٥,٧

مثــ٢ــال ارسم منحنى الدالة د : ح ⟵ ح^+^ حيث د(س) = (٣)^س^ ومن الرسم أوجد

: Ⓐ د(١,٥) Ⓑ قيمة س إذا كان: (٣)^س^ = ٨ Ⓒ √٣

س	٣	٢	١	٠	ـ١	ـ٢	ـ٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

المجال ح ، المدى ح^+^ ، متزايدة على مجالها

Ⓐ د(١,٥) =(٣)^١,٥^ ≃ ٥,٢

Ⓑ س ≃ ١,٩

Ⓒ √٣ =(٣)^٠,٥^ ≃ ١,٧

مثـ٣ـال : أرسم منحنى الدالة د (س) = $(\frac{١}{٢})^{س + ١}$ في الفترة [ـ٣، ٤] و من الرسم

أوجد : ⓐ د (ـ٥,٣) ⓑ $\sqrt[٤]{٢}$ ⓒ حل المعادلة د (س) = ٧

الحـــــــــل

س	٣	٢	١	٠	ـ١	ـ٢	ـ٣	ـ٤
ص	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨

من الرسم : د (ـ٥,٣) ≃ ٥,٣

القيمة التقريبية للعدد ≃ $\sqrt[٤]{٢}$

قيمة س عندما د(س) = ٧

س ≃ ـ ٢,٨ تقريباً

مثـ٤ـال ارسم منحنى الدالة د : ع ⟵ $ع^{+}$ حيث د(س) = $(\frac{١}{٣})^{س}$ ومن الرسم أوجد

ⓐ د(−٢,١) ⓑ قيمة س إذا كان: د(س) = ٢٠

الحـــــــــل

س	ـ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢	٣
ص	٢٧	٩	٣	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٢٧}$

المجال ع ، المدى $ع^{+}$

، تناقصية على مجالها

ⓐ د(−٢,١) ≃ ٣,٧

ⓑ د(س) = ٢٠ من الرسم ≃ ـ ٢,٨

مثــال ٥ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٢)^{\text{س}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{د}(\text{س}+٥) + \text{د}(\text{س}+٣)}{\text{د}(\text{س}+٣) + \text{د}(\text{س})} = \frac{٤٠}{٩}$

الحــل

الطرف الأيمن $= \frac{(٢)^{\text{س}+٥} + (٢)^{\text{س}+٣}}{(٢)^{\text{س}+٣} + (٢)^{\text{س}}} = \frac{(٢)^{\text{س}+٣}\,[(٢)^{٢} + ١]}{(٢)^{\text{س}}\,[(٢)^{٣} + ١]}$

$= \frac{(٢)^{٣}\,[٤ + ١]}{[٨ + ١]} = \frac{٨ \times ٥}{٩} = \frac{٤٠}{٩}$

مثــال ٦ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٣)^{\text{س}-١}$ فأثبت أن : $\frac{\text{د}(\text{س}+١) \times \text{د}(\text{س}+٢)}{\text{د}(\text{س}+٣)} = \text{د}(\text{س})$

الحــل

الطرف الأيمن $= \frac{(٣)^{\text{س}-١+١} \times (٣)^{\text{س}-١+٢}}{(٣)^{\text{س}-١+٣}} = \frac{(٣)^{\text{س}} \times (٣)^{\text{س}+١}}{(٣)^{\text{س}+٢}}$

$= \frac{(٣)^{٢\text{س}+١}}{(٣)^{\text{س}+٢}} = (٣)^{٢\text{س}+١-\text{س}-٢} = (٣)^{\text{س}-١} = \text{د}(\text{س})$ الأيسر

مثــال ٧ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٢)^{\text{س}}$ ، $\text{ر}(\text{س}) = (\frac{١}{٢})^{\text{س}}$ فأوجد قيمة : $\frac{\text{د}(\frac{٥}{٢}) - \text{ر}(-٢)}{\text{د}(\frac{٣}{٢}) - \text{ر}(-١)}$

الحــل

الطرف الأيمن $= \frac{(٢)^{\frac{٥}{٢}} - (\frac{١}{٢})^{-٢}}{(٢)^{\frac{٣}{٢}} - (\frac{١}{٢})^{-١}} = \frac{(٢)^{\frac{٥}{٢}} - (٢)^{٢}}{(٢)^{\frac{٣}{٢}} - (٢)}$

$= \frac{(٢)^{٢}\,[(٢)^{\frac{١}{٢}} - ١]}{(٢)\,[(٢)^{\frac{١}{٢}} - ١]} = ٢$

مثــال ٨ : إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = (٥)^{\text{س}}$ فأثبت أن : $\frac{\text{د}(\text{س}+٤) - \text{د}(\text{س}+٣)}{\text{د}(\text{س}+٥) - \text{د}(\text{س}+٤)} = \frac{٤٠}{٩}$

الحــل

الطرف الأيمن $= \frac{(٥)^{\text{س}+٤} - (٥)^{\text{س}+٣}}{(٥)^{\text{س}+٥} - (٥)^{\text{س}+٤}} = \frac{(٥)^{\text{س}+٣}\,[(٥) - ١]}{(٥)^{\text{س}+٣}\,[(٥)^{٢} - ٥]} = \frac{٥ - ١}{٢٥ - ٥} = \frac{١}{٥}$

تطبيقات على الدالة الأسية:

[١] النمو الأسى : الدالة د: د(ن) = أ (١ + ر)^ن تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة : أ القيمة الأبتدائية ، ر النسبة المئوية ، ن الفترة الزمنية

الربح المركب: عند حساب جملة مبلغ (جـ) لمبلغ (أ) فى أحدى البنوك بربح سنوى ر المبلغ تعطى بالعلاقة

$$جـ = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س}$$

[٢] التضاؤل الأسى: الدالة د: د(ن) = أ (١ـ ر)^ن تستخدم لتمثيل النمو الأسى بنسبة مئوية ثابتة : أ القيمة الأبتدائية ، ر نسبة التضاؤل ، ن الفترة الزمنية

مثـــ٩ـــال : أودع رجل مبلغ ٢٠٠٠ جنية فى أحدى البنوك التى تعطى فائدة سنوية مركبة ٧٪ أوجد جملة المبلغ بعد مرور ١٠ سنوات فى كلاً من الحالات الآتية:

(أ) العائد السنوى (ب) العائد النصف سنوى (جـ) العائد شهرى

الحـــــــل

(أ) ∵ العائد السنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ١ ∴ س = ١

$$∴ جـ = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س} = ٢٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٧}{١}\right)^{١٠} = ٣٩٣٤,٣ \text{ جنية}$$

(ب) ∵ العائد نصف سنوى أى أن عدد فترات التقسيم = ٢ ∴ س = ٢

$$∴ جـ = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س} = ٢٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٧}{٢}\right)^{١٠×٢} = ٣٩٧٩,٦ \text{ جنية}$$

(جـ) ∵ العائد شهرى أى أن عدد فترات التقسيم = ١٢ ∴ س = ١٢

$$∴ جـ = أ \left(١ + \frac{ر}{س}\right)^{ن س} = ٢٠٠٠ \left(١ + \frac{٠,٠٧}{١٢}\right)^{١٠×١٢} = ٤٠١٩,٣ \text{ جنية}$$

مثـ١٠ـال : السعر السوقى لسياة يتناقص طبقاً للعلاقة س = ١٦٠٠٠٠٠(٠,٩٥)^ن حيث س سع السيارة بالجنية ، ن الزمن بالسنةات أوجد :

(أ) سعر السيارة عند شرائها الجديدة (ب) سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات

الحـــــــل

(أ) سعر السيارة عند شرائها الجديدة = ١٦٠٠٠٠٠(٠,٩٥)^٠ = ١٦٠٠٠٠٠جنية

(ب) سعر السيارة بعد مرور ٥ سنوات = ١٦٠٠٠٠٠(٠,٩٥)^٥ = ١٢٣٨٠٤,٩٥جنية

حل المعادلات الأسية جبرياً

(١) إذا كان : $ا^{ن} = ١$ فإن: ن = ٠ ، ا ∈ ع − {−١،٠،١}.

(٢) إذا كان : $ا^{ن} = ا^{م}$ فإن: ن = م ، ا ∈ ع − {−١،٠،١}.

(٣) إذا كان : $ا^{ن} = ب^{ن}$
- فإن: ا = ب ، ن عدد فردى
- فإن: ا = ± ب ، ن عدد زوجى
- إذا كان : ا ≠ ب فإن: ن = ٠

مثـــــــــ١ــــــال: أوجد مجموعة حل المعادلة: $(٣)^{٢س-٥} = ٢٤٣$ فى ع

الحــــــــــــل

$(٧)^{٢س-٥} = ٢٤٣ = (٣)^{٥}$ ∴ ٢س − ٥ = ٥ ∴ س = ٥

مثـــــــــ٢ــــــال: اوجد مجموعة حل المعادلة $(١+س)^{٤} = ١٠٠٠٠$ فى ع

الحــــــــــــل

$(١+س)^{٤} = (±١٠)^{٤}$ ∴ ١+س = ±١٠

إما ١+س = ١٠ ∴ س = ٩ أ، ١+س = −١٠

∴ س = −١١ ∴ م.ح = {٩ ، −١١}

مثـ٣ـال إذا كان د(س) =$(٢)^{س}$ وكانت د(٢س + ١) − د(٢س − ١) = ١٢ فأوجد قيمة س

الحــــــــــــل

$(٢)^{٢س+١} - (٢)^{٢س-١} = ١٢$ ∴ $٢^{٢س-١}(٢^{٢} - ١) = ١٢$

∴ $٢^{٢س-١} × ٣ = ١٢$ ∴ $٢^{٢س-١} = ٤ = (٢)^{٢}$

∴ ٢س − ١ = ٢ ∴ ٢س = ٣ ∴ س = $\frac{٣}{٢}$

مثـ٤ـال حل المعادلة $٩^{س} + ٣^{٢س-١} = ١٢$

الحــــــــــــل

$٣^{٢س} + ٣^{٢س-١} = ١٢$ ∴ $٣^{٢س-١}(٣+١) = ١٢$

∴ $٣^{٢س-١} × ٤ = ١٢$ ⇐ $٣^{٢س-١} = ٣$

∴ ٢س − ١ = ١ ⇐ ٢س = ٢ ∴ س = ١

مثـ٥ـال حل المعادلة $4^{\text{س}} - 9\times 2^{\text{س}} + 8 = 0$

الحـــــــل

$4^{\text{س}} - 9\times 2^{\text{س}} + 8 = 0$ ∴ $(2^{2})^{\text{س}} - 9\times 2^{\text{س}} + 8 = 0$

∴ $(2^{\text{س}} - 8)(2^{\text{س}} - 1) = 0$

إما $2^{\text{س}} - 8 = 0$ ومنها $2^{\text{س}} = 2^{3}$ ∴ $\text{س} = 3$

أو $2^{\text{س}} - 1 = 0$ ومنها $2^{\text{س}} = 1$ ∴ $\text{س} = 0$

مثـ٦ـال حل المعادلة $(\sqrt[3]{\text{س}})^{2} - 4\sqrt[3]{\text{س}} = -3$

الحـــــــل

$\text{س}^{\frac{2}{3}} - 4\,\text{س}^{\frac{1}{3}} + 3 = 0$ ∴ $(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 1)(\text{س}^{\frac{1}{3}} - 3) = 0$

إما $\text{س}^{\frac{1}{3}} = 1$ ∴ $\text{س} = 1$

أو $\text{س}^{\frac{1}{3}} = 3$ ∴ $(\text{س}^{\frac{1}{3}})^{3} = (3)^{3}$ ∴ $\text{س} = 27$

مثـ٧ـال حل المعادلة $(5)^{\text{س}} + (5)^{3-\text{س}} = 30$

الحـــــــل

$(5)^{\text{س}} + (5)^{3-\text{س}} = 30$ بالضرب × $(5)^{\text{س}}$

∴ $(5)^{2\text{س}} + (5)^{3} = 30 \times (5)^{\text{س}}$

∴ $(5)^{2\text{س}} - 30 \times (5)^{\text{س}} + 125 = 0$

∴ $[(5)^{\text{س}} + 5][(5)^{\text{س}} - 25] = 0$

إما $(5)^{\text{س}} - 5 = 0$ ومنها $(5)^{\text{س}} = 5$ ∴ $\text{س} = 1$

أو $(5)^{\text{س}} - 25 = 0$ ومنها $(5)^{\text{س}} = 25 = (5)^{2}$ ∴ $\text{س} = 2$

مثـ٨ـال حل المعادلة $(٣)^{٢س-١} - ١٠ \times (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$

الحـــــــــــل

$(٣)^{٢س-١} - ١٠ \times (٣)^{س} + ٢٧ = ٠$ بالضرب ×٣

$\therefore (٣)^{٢س} - ٣٠ \times (٣)^{س} + ٨١ = ٠ \Leftarrow [(٣)^{س} - ٢٧][(٣)^{س} - ٣]$

إما $(٣)^{س} - ٢٧ = ٠$ ومنها $(٣)^{س} = ٢٧ = (٣)^{٣}$ $\therefore$ س = ٣

أ، $(٣)^{س} - ٣ = ٠$ ومنها $(٣)^{س} = ٣$ $\therefore$ س = ١

مثـ٩ـال حل المعادلة $(٥)^{س+١} + (٥)^{-س} = ٦$

الحـــــــــــل

$٥ \times (٥)^{س} + \frac{١}{(٥)^{س}} = ٦$ بالضرب × $(٥)^{س}$

$\therefore ٥ \times (٥)^{٢س} + ١ = ٦(٥)^{س}$

$\therefore ٥ \times (٥)^{٢س} - ٦ \times (٥)^{س} + ١ = ٠ \Leftarrow [٥ \times (٥)^{س} - ١][(٥)^{س} - ١]$

إما $٥ \times (٥)^{س} - ١ = ٠$ ومنها $(٥)^{س} = \frac{١}{٥}$ $\therefore$ س = -١

أ، $(٥)^{س} - ١ = ٠$ ومنها $(٥)^{س} = ١$ $\therefore$ س = ٠

مثـ١٠ـال إذا كانت $د_١(س) = (٣)^{س}$ ، $د_٢(س) = (٩)^{س}$ فأوجد قيمة س التى تحقق المعادلة $د_١(٢س - ١) + د_٢(س + ١) = ٧٥٦$

الحـــــــــــل

$(٣)^{٢س-١} + (٩)^{س+١} = ٧٥٦$

$\therefore (٣)^{٢س-١} + (٣)^{٢س+٢} = ٧٥٦ \Leftarrow (٣)^{٢س-١}[١ + (٣)^{٣}] = ٧٥٦$

$\therefore (٣)^{٢س-١} \times [١ + ٢٧] = ٧٥٦$

$\therefore (٣)^{٢س-١} = ٧٥٦ \div ٢٨ = ٢٧ = (٣)^{٣}$

$\therefore ٢س - ١ = ٣ \Leftarrow ٢س = ٤$ $\therefore$ س = ٢

تمـــــارين

١	ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية، ثم أوجد المجال والمدى لكل منها وبين: أي منها تكون متزايدة وأى منها متناقصة أ د(س) = $٢^{س}$ ب د(س) = $٣^{س}$ ج د(س) = $(\frac{١}{٢})^{س}$
٢	أوجد جملة مبلغ ٨٠٠٠ جنيه موضوع فى بنك يُعطى فائدة سنويةّ مركبة قدرُها ٥٪ لمدة ٧ سنوات.
٣	أكمل ما يأتى: أ إذا كان $٢^{\|س\|}$ = ٣٢ فإن س = ... ب إذا قطع منحنى الدالة $د_١$ حيث $د_١$(س) = $٣^{س}$ منحنى الدالة $د_٢$ حيث $د_٢$(س) = ٤-س في نقطة (ك ، ٣) فإن مجموعة حل المعادلة $٣^{س}$ = ٤-س تساوي ....
٤	إذا كانت د(س) = $٢^{س}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلات: أ د(س) = ٨ ب د(س+١) = $\frac{١}{٣٢}$
٥	إذا كانت د(س) = $٧^{س-٢}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ: أ د(س) = ٣٤٣ ب د(٢س) = $\frac{١}{٤٩}$
٦	إذا كانت د(س) = $٣^{س+١}$ أوجد مجموعة حل كل من المعادلاتِ: أ د(س) = ٢٧ ب د(س-١) = $\frac{١}{٩}$
٧	تتناقص أعداد الكائنات البحرية تبعًا لدالة التضاؤل الأسى ص = ٨١٩٢ $(\frac{١}{٢})^{ن-١}$ حيث ن عدد الاسابيع بدءًا من الآن. أوجد: أ عدد هذه الكائنات بعد مرور ٤ أسابيع من الآن. ب بعد كم أسبوع من الآن يصبح عدد هذه الكائنات ٢٥٦.
٨	أكمل مايأتى: أ الدالة د : د(س) = $٢^{س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة .... ب الدالة د : د(س)= $٢^{١-س}$ تقطع محور الصادات فى النقطة .... ج إذا مر منحنى الدالة د : د(س) = $أ^{س}$ بالنقطة (١ ، ٣) فإن أ = ...

اللوغاريتمات

ص = لـو$_{م}$ س ⟺ س = م^{ص} حيث م ∋ ع$^{+}$ ـ {١} ، س ∋ ع$^{+}$ ، ص ∋ ع

ملاحظة : لا معنى عن لوغاريتم عدد غير موجب ، بمعنى لـو$_{٢}$ ـ٣ ، لـو$_{٣}$ (٠) ليس لها معنى

الأساس م يجب أن يكون موجب يختلف عن الواحد لـو$_{-٢}$ ٨ ، لـو$_{٠}$ ٥ ليس لها معنى

اللوغاريتم المعتاد هو لوغاريتم أساسه ١٠ وتكتب لـو$_{١٠}$ ٨ = لـو ٨

الدالة اللوغاريتمية

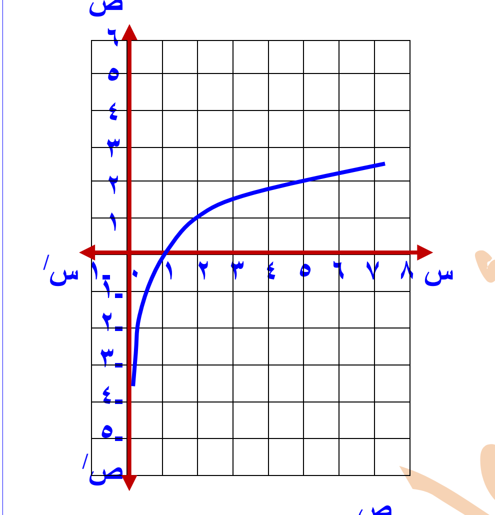
إذا كان: م ∋ ع$^{+}$ ـ {١} فإن الدالة د: ع$^{+}$ ⟵ ع : د(س) = لـو$_{م}$ س

التمثيل البيانى للدالة اللوغاريبمية

هى د: ح$_{+}$ ⟵ ح ؛ د(س) = لو$_{م}$ س : م ∋ ح$_{+}$ ـ { ١ }

إذا كانت د(س) = لو$_{م}$ س فإن الخط البيانى للدالة د(س)

يمثل بالأزواج المرتبة (س ، لو$_{م}$ س)

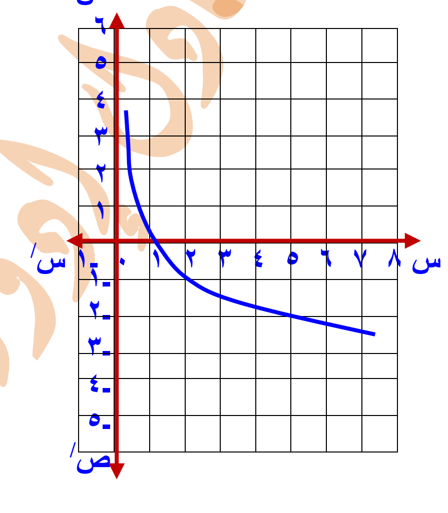


(١) إذا كانت : ـ م > ١

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

المجال = ح$_{+}$ أ؛] ٠ ، ∞ [

المدى = ح الدالة تزايدية على ح$_{+}$



(٢) إذا كانت ٠ < م < ١

المنحنى يمر بالنقطة (١ ، ٠)

المجال = ح$_{+}$ أ؛] ٠ ، ∞ [

المدى = ح

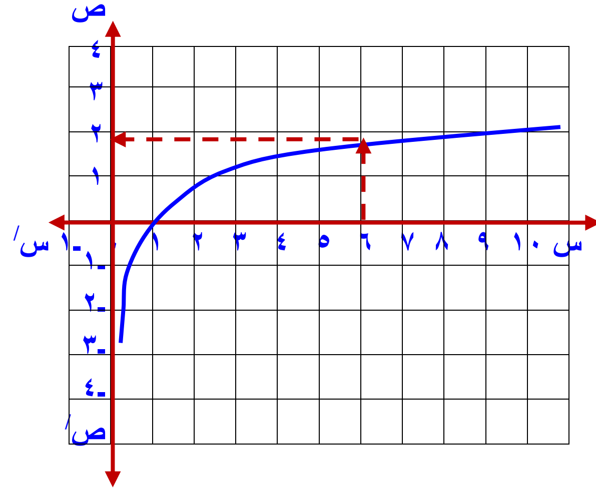
الدالة تناقصية على ح$_{+}$

مثـــــ١ـــال : إرسم الشكل البيانى للدالة : د : د (س) = لـو$_{٣}$ س متخذاً س ∋ [$\frac{١}{٩}$ ، ٩]
ومن الرسم أوجد : قيمة تقريبية للعدد لـو$_{٣}$ ٦، عددين صحيحين ينحصر بينهما لـو$_{٣}$ ٣,٥

الحـــــــــــل

نكون الجدول :

س	$\frac{١}{٩}$	$\frac{١}{٣}$	١	٣	٩
د (س)	ـ ٢	ـ١	٠	١	٢



ومن الرسم :

لإيجاد قيمة تقريبية للعدد لو$_{٣}$ ٦ :

نرسم عند س = ٦ مستقيماً يوازى محور الصادات

ليقابل المنحنى فى نقطة فتكون قيمة ص

المناظرة على محور الصادات = ١,٦ ∴ لـو$_{٣}$ ٦ ≃ ١,٦

، بالمثل : نجد أن : لـو$_{٣}$ ٣,٥ ينحصر بين ١ ، ٢

مثـــــ٢ـــال: إذا كان منحنى الدالة د: د(س) = لـو$_{م}$ س يمر بالنقطة (٤، ٢) أوجد قيمة م
ثم أرسم منحنى الدالة متخذ س ∋ [$\frac{١}{٨}$ ، ٨] ومن الرسم أستنتج المدى والأطراد

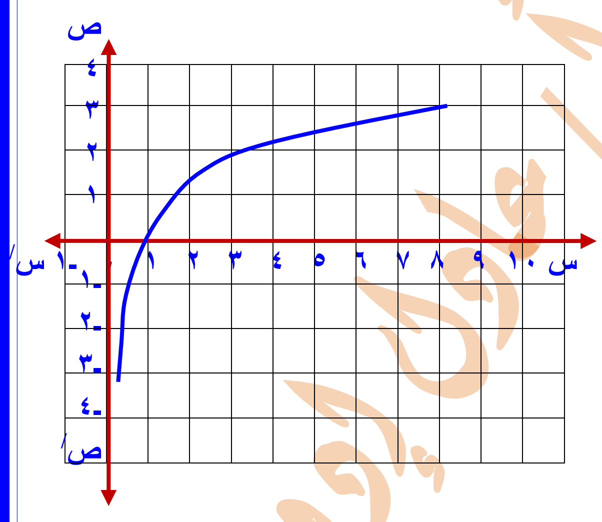
الحـــــــــــل

∵ د(س) = لـو$_{م}$ س يمر بالنقطة (٤، ٢)

∴ لـو$_{م}$ ٤ = ٢ ⟸ (م)^{٢} = ٤

∴ م = ٢ والسالب مرفوض

∴ د(س) = لـو$_{٢}$ س نكون الجدول :



س	$\frac{١}{٨}$	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	١	٢	٤	٨
د (س)	ـ ٣	ـ٢	ـ١	٠	١	٢	٣

ومن الرسم : المدى ع ، الدالة تزايدية على مجالها

مثـــــ٣ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لـو$_{٢}$ س = ٢ (ب) لـو$_{٣}$ س = - ٢ (ج) لـو$_{٢}$ ٣٢ = س

الحـــــــــل

(أ) س = ٢^{٢} = ٤ ∴ م.ح = { ٤ }

(ب) س = ٣$^{-٢}$ = $\frac{١}{٩}$ ∴ م.ح = { $\frac{١}{٩}$ }

(ج) ٢^{س} = ٣٢ = ٢^{٥} ∴ س = ٥ ∴ م.ح = { ٥ }

مثـــــ٤ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لـو$_{س}$ ١٢٥ = ٣ (ب) لـو$_{س}$ ٨س = ٤ (ج) لـو$_{٢}$ $\frac{١}{٨}$ = س

الحـــــــــل

(أ) ١٢٥ = س^{٣} ∴ ٥^{٣} = س^{٣} ∴ س = ٥ ∴ م.ح = { ٥ }

(ب) ٨ س = س^{٤} ٨ = س^{٣}

٢^{٣} = س^{٣} ∴ س = ٢ ∴ م.ح = { ٢ }

(ج) (٢)^{س} = $\frac{١}{٨}$ (٢)^{س} = (٢)$^{-٣}$ ∴ س = - ٣ ∴ م.ح = { - ٣ }

مثـــــ٥ـــال : عين مجال الدزال المعرفة بالقواعد الآتية

(أ) د$_{١}$ = لـو$_{٣}$ (٢س + ١) (ب) د$_{٢}$ = لـو$_{س-٢}$ س (ج) د$_{٣}$ = لـو$_{٢-س}$ س

الحـــــــــل

(أ) الدالة معرفة عندما ٢س + ١ > ٠ ⟸ ٢س > - $\frac{١}{٢}$ ∴ مجال د$_{١}$ =] - $\frac{١}{٢}$ ، ∞[

(ب) س > ٠ ، س ـ ٢ > ٠ ، س ـ ٢ ≠ ١ ⟸ س > ٠ ، س > ٢ ، س ≠ ٣

∴ مجال د$_{٢}$ =] ٢ ، ∞[ـ {٣}

(ج) س >٠ ، ٢ ـ س >٠ ، ٢ ـ س ≠ ١ ⟸ س > ٠ ، س < ٢ ، س ≠ ١

∴ مجال د$_{٢}$ =] ٠ ، ٢[ـ {١}

مثـــــ٦ـــال : أوجد قيمة س إذا كان

(أ) لو$_{٢}$ (س^{٢} – ٢س) = ٣ (ب) لو$_{٢\sqrt{٣}}$ (س^{٢} – س) = ٢

الحـــــــــــل

(أ) س^{٢} – ٢ س = ٢ ^{٣} س^{٢} – ٢ س = ٨

س^{٢} – ٢ س – ٨ (س – ٤) (س + ٢) = ٠

س = ٤ أ، س = -٢ ∴ م.ح = { ٤ ، -٢ }

(ب) س^{٢} – س = ($٢\sqrt{٣}$)^{٢} س^{٢} – س = ١٢

س^{٢} – س – ١٢ (س – ٤) (س + ٣) = ٠

س = ٤ س = -٣ ∴ م.ح = { ٤ ، -٣ }

مثـــــ٧ـــال : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الآتية

(أ) (لو$_{٢}$س)^{٢} – ٥ لو$_{٢}$ س +٦ = ٠ (ب) (لو$_{٢}$س)^{٢} – ٥ لو$_{٢}$ س = ١٢

الحـــــــــــل

(أ) (لو$_{٢}$س - ٢)(لو$_{٢}$ س -٣) = ٠ ⟸ لو$_{٢}$س = ٢ أ، لو$_{٢}$ س = ٣

س = (٢)^{٢} = ٤ أ، س = (٢)^{٣} = ٨ ∴ م.ح = { ٤ ، ٨ }

(ب) (لو$_{٢}$س - ٤)(لو$_{٢}$ س +٣) = ٠ ⟸ لو$_{٢}$س = ٤ أ، لو$_{٢}$ س = -٣

س = (٢)^{٤} = ١٦ أ، س = (٢)$^{-٣}$ = $\frac{١}{٨}$ ∴ م.ح = { ١٦ ، $\frac{١}{٨}$ }

مثـــــ٨ـــال : أوجد فى ح مجموعة حل المعادلات الآتية

(أ) لو$_{٣}$ | س +٥ | = ٢ (ب) (لو$_{٢}$س)^{٢} - لو$_{٢}$ س = ٠

الحـــــــــــل

(أ) | س + ٥ | = ٣ ^{٢} ⟸ س + ٥ = ٩ أ، س + ٥ = -٩

س = ٩ – ٥ أ، س = -٩ – ٥

س = ٤ أ، س = -١٤ ∴ م.ح = { ٤ ، -١٤ }

(ب) لو$_{٢}$ س (لو$_{٢}$ س -١) = ٠ ⟸ لو$_{٢}$ س = ٠ أ، لو$_{٢}$ س -١ = ٠

س = (١٠) ٠ = ١ أ، س = (١٠) ١ = ١٠ ∴ م.ح = { ١ ، ١٠ }

تمـــــارين

(١) أكمل ما يأتى:

(أ) الصورة الأسية المكافئة للصورة لو$_{٣}$ ٢٧ = ٣ هى ....

(ب) الصورة اللوغاريتمية المكافئة للصورة ٣^{صفر} = ١ هى ....

(جـ) لو ٠,٠٠١ = ...

(د) لو$_{٢}$ ١ = ...

(هـ) إذا كان لو$_{س}$ ٤ = ٢ فإن س = ...

(و) إذا كان لو$_{٢}$ ١٢٨ = س + ١ فإن س = ...

(ز) مجال الدالة د : د(س) = لو$_{٢}$ س هو ....

(ح) الدالة د حيث د(س) = لو$_{أ}$ س متناقصة لكل أ ∈ ....

(ط) منحنى الدالة د حيث د(س) = لو$_{٢}$ س يمر بالنقطة (٨، ....)

(ى) إذا كان لو٣ = س ، لو ٥ = ص فإن لو ١٥ = ... (بدلالة س، ص)

(٢) أوجد فى ع مجموعة حل كلٍّ من المعادلات الآتية:-

(أ) لو$_{٣}$ (س - ١) = ٢

(ب) لو$_{٥}$ (س + ٢) = ٣

(جـ) لو$_{س}$ ٩ = $\frac{٢}{٣}$

(د) لو$_{س+١}$ ٨ = $\frac{٣}{٤}$

(هـ) لو$_{س}$ (س + ٢) = ٢

(و) لو$_{س}$ ٩ = ٢

(٣) بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

(أ) لو$_{٥}$ ١

(ب) لو$_{٧}$ ٧

(جـ) لو$_{٣}$ ٩

(د) لو$_{٦}$ ٣ + لو$_{٦}$ ٢

(٤) مثل بيانيًّا الدالة د فى كل مما يأتى الآتية ومن الرسم أوجد مداها وابحث اطرادها:

(أ) د(س) = لو$_{٢}$ س

(ب) د(س) = لو$_{٣}$ س

(جـ) د(س) = لو$_{\frac{١}{٢}}$ س

(د) د(س) = لو$_{\frac{١}{٣}}$ (س + ١)

(٥) استخدم الحاسبة فى إيجاد قيمة كلٍّ من:-

(أ) لو ١٥

(ب) لو$_{٢}$ ٢٧

(جـ) ٤لو٧ - ٥لو١٣

(٦) إذا كانت مصاريف الاشتراك السنوى بالجنيه لأسرة فى أحد النوادى الاجتماعية تتبع العلاقة د(س) = ٥٠٠ + ١٠٠لو (ن س) حيث ن عدد سنوات الاشتراك س عدد الأفراد. أوجد قيمة اشتراك أسرة مكونة من ٥ أفراد للسنة الرابعة فى هذا النادى.

قوانيين اللوغاريتمات

[١] لـو س ص = لـو س + لـو ص
فمثلا : لـو ٦ = لـو ٢ × ٣ = لـو ٢ + لـو ٣
والعكس : لـو ٣ + لـو ٤ = لـو ٣×٤ = لـو ١٢
لـو س + لـو (س+٢) = لـو س (س+٢)

تذكر أن :
* لـو (س + ص) ≠ لـو س + لـو ص
* لـو (س ـ ص) ≠ لـو س ـ لـو ص
* لـو (س × ص) ≠ لـو س × لـو ص
* لـو (س ÷ ص) ≠ لـو س ÷ لـو ص

[٢] لـو $\frac{س}{ص}$ = لـو س ـ لـو ص
فمثلا : لـو $\frac{٣}{٤}$ = لـو ٣ ـ لـو ٤
والعكس : لـو ٤ ـ لـو ٥ = لـو $\frac{٤}{٥}$
لو س ـ لو (س +١) = لـو $\frac{س}{س + ١}$

[٣] لـو $س^{ن}$ = ن لـو س
فمثلا : لـو $س^{٥}$ = ٥ لـو س
والعكس : ٣ لـو س = لـو $س^{٣}$

[٤] $لو_{م}$ م = ١ فمثلاً : $لو_{٥}$ ٥ = ١

[٥] $لو_{م}$ ١ = صفر

[٦] إذا: س ∋ $ع^{+}$ ، ص ، م ∋ $ع^{+}$ ـ {١} فإن : $لو_{ص}$ س = $\frac{لو_{م} س}{لو_{م} ص}$

فمثلاً: $لو_{٣}$ ٨ = $\frac{لو ٨}{لو ٣}$ ، $لو_{٩}$ ٧ = $\frac{لو_{٥} ٧}{لو_{٥} ٩}$

[٧] إذا: س ∋ $ع^{+}$ ـ {١} ، ص ∋ $ع^{+}$ ـ {١} فإن : $لو_{ص}$ س = $\frac{١}{لو_{س} ص}$

فمثلاً: $لو_{٣}$ ٨ = $\frac{١}{لو_{٨} ٣}$ ⟸ $لو_{٩}$ ٧ × $لو_{٧}$ ٩ =١

ملاحظة : إذا: س ∋ $ع^{+}$ ، م عدداً زوجياً لا يساوى الصفر ، م ∋ $ع^{+}$ ـ {١}
فإن : $لو_{م}$ $(س)^{م}$ = م $لو_{م}$ |س| فمثلاً: $لو_{٣}$ $(س)^{٤}$ = ٤ $لو_{٣}$ |س|

مثــــال١ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

(أ) لو$_٢$ ١٥ + لو$_٢$ ١٤ ـ لو$_٢$ ١٠٥ (ب) لو ٤٨ + لو ١٢٥ ـ لو ٦

الحـــــــــل

(أ) لو$_٢$ $\frac{١٥ \times ١٤}{١٠٥}$ = لو$_٢$ ٢ = ١

(ب) لو $\frac{٤٨ \times ١٢٥}{٦}$ = لو ١٠٠٠ = لو $(١٠)^٣$ = ٣ لو ١٠ = ٣ × ١ = ٣

مثــــال٢ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

(أ) ٣لو$_٣$ ٥ + لو$_٣$ $\frac{٢٤٣}{١٢٥}$ (ب) ١ + لو ٣ ـ لو ٢ ـ لو ١٥

الحـــــــــل

(أ) ٣لو$_٣$ ٥ + لو$_٣$ ٢٤٣ ـ لو$_٣$ ١٢٥ = لو$_٣$ $(٥)^٣$ + لو$_٣$ $(٣)^٥$ ـ لو$_٣$ $(٥)^٣$ = ٥لو$_٣$ ٣ = ٥

(ب) لو ١٠ + لو ٣ ـ لو ٢ ـ لو ١٥ = لو $\frac{١٠ \times ٣}{٢ \times ١٥}$ = لو ١ = صفر

مثــــال٣ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

لو$_٢$ $\frac{٣}{٢٥}$ + ٥لو$_٢$ ٥ ـ لو$_٢$ $\frac{١٢٥}{١٢}$ + لو$_٢$ ٢٧ ـ لو$_٢$ ٢٤٣

الحـــــــــل

لو$_٢$ $\frac{٣ \times (٥)^٥ \times ١٢ \times ٢٧}{٢٥ \times ١٢٥ \times ٢٤٣}$ = لو$_٢$ ٤ = لو$_٢$ $(٢)^٢$ = ٢ لو$_٢$ ٢ = ٢

مثــــال٤ : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة

لو ٠,٠٠٩ ـ لو $\frac{٢٧}{١٦}$ + لو $١٥\frac{٥}{٨}$ ـ لو $\frac{١}{١٢}$

الحـــــــــل

لو $\frac{٩ \times ١٦ \times ١٢٥ \times ١٢}{١٠٠٠ \times ٢٧ \times ٨ \times ١}$ = لو ١ = صفر

مثـــ٥ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو س + لو ٣ = لو ١٥   (ب) لو س ـ لو ٢ = لو ٣

الحـــــــــل

(أ) لو س × ٣ = لو ١٥ ⇐ لو ٣ س = لو ١٥

٣س = ١٥ ⇐ س = ٥   ∴ م.ح = { ٥ }

(ب) لو $\frac{\text{س}}{٢}$ = لو ٣ ⇐ $\frac{\text{س}}{٢}$ = ٣

س = ٣ × ٢ = ٦   ∴ م.ح = { ٦ }

مثـــ٦ـــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س ـ ٢) = ٣   (ب) لو$_{٤}$ س + لو$_{٤}$ (س + ١٢) = ٣

الحـــــــــل

(أ) لو$_{٢}$ س (س ـ ٢) = ٣ ⇐ س^{٢} ـ ٢ س = (٢)^{٣}

س^{٢} ـ ٢ س = ٨ ⇐ س^{٢} ـ ٢ س ـ ٨ (س ـ ٤) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٤   س = -٢ (مرفوض)   ∴ م.ح = { ٤ }

(ب) لو$_{٤}$ س(س + ١٢) = ٣ ⇐ لو$_{٤}$ (س^{٢} + ١٢س) = ٣

س^{٢} + ١٢ س = (٤)^{٣}

س^{٢} + ١٢ س ـ ٦٤ = (س ـ ٤)(س +١٦) = ٠

∴ س = ٤   س = -١٦(مرفوض)   ∴ م.ح = { ٤ }

مثـــ٧ـــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٧ × لو$_{٧}$ ٩ × لو$_{٣}$ ٢

الحـــــــــل

المقدار = $\frac{\text{لو ٥}}{\text{لو ٢}}$ × $\frac{\text{لو ٧}}{\text{لو ٥}}$ × $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٧}}$ × $\frac{\text{لو ٢}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{٢لو ٣}}{\text{لو ٣}}$ = ٢

مثـــ٨ــــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) لو $س^{٢}$ = لو ٤ + لو ٩ (ب) $\frac{\text{لو } ٤٩ - (\text{لو } ٧)^{٢}}{\text{لو } ٠,٠٧}$ = لو س

الحـــــــــل

(أ) لو $س^{٢}$ = لو ٤×٩ = لو ٣٦ = لو $(٦)^{٢}$ ⇐ ٢ لو |س| = ٢ لو ٦

∴ |س| = ٦ ∴ س = ±٦ تحقق ∴ م.ح = { ٦ ، ـ ٦ }

(ب) لو س = $\frac{\text{لو } (٧)^{٢} - (\text{لو}٧)^{٢}}{\text{لو } ٧ - \text{لو } ١٠٠} = \frac{٢\text{لو } (٧) - (\text{لو}٧)^{٢}}{\text{لو } ٧ - \text{لو } (١٠)^{٢}} = \frac{\text{لو } (٧)[٢ - \text{لو}٧]}{\text{لو } ٧ - ٢}$

= ـ لو ٧ = لو $(٧)^{-١}$ = لو $\frac{١}{٧}$

مثـــ٩ــــال : أوجد مجموعة الحل لكلا من المعادلات الاتية

(أ) $(\text{لو س})^{٣}$ = لو $س^{٤}$ (ب) $(٢)^{(\text{لو س})^{٢}}$ × ٦٤ = $(٣٢)^{(\text{لو س})}$

الحـــــــــل

(أ) $(\text{لو س})^{٣}$ = ٤ لو س ⇐ $(\text{لو س})^{٣}$ ــ ٤ لو س = ٠

لو س [$(\text{لو س})^{٢}$ ــ ٤] = ٠ ⇐ لو س = ٠ أ، $(\text{لوس})^{٢}$ = ٤

∴ س = $١٠^{\text{صفر}}$ أ، لو س = |٢|

∴ س = ١ أ، لوس = ٢ أ، لوس = -٢

س = $(١٠)^{٢}$ = ١٠٠ س = ١٠ ـ ٢ = ٠,٠١

∴ م.ح = { ١ ، ١٠٠ ، ٠,٠١ }

(ب) $(٢)^{(\text{لو س})^{٢}}$ × $(٢)^{٦}$ = $(٢^{٥})^{(\text{لو س})}$ ⇐ $(٢)^{(\text{لوس})^{٢} + ٦}$ = $(٢)^{٥(\text{لو س})}$

∴ $(\text{لو س})^{٢}$ + ٦ = ٥ لو س ⇐ $(\text{لو س})^{٢}$ ــ ٥ لو س + ٦ = ٠

نحلل: (لوس ــ ٢) (لو س ــ ٣) = ٠

∴ لو س = ٢ أ، لو س = ٣

∴ س = $١٠^{٢}$ = ١٠٠ أ، س = $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠

∴ م.ح = { ١٠٠ ، ١٠٠٠ }

مثـــ١٠ــال : بدون استخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة :

(أ) $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩}\ ١٢}$ (ب) $\text{لو}_{\text{أبجـ}}\ \text{أ} + \text{لو}_{\text{أبجـ}}\ \text{ب} + \text{لو}_{\text{أبجـ}}\ \text{جـ}$

الحـــــــــل

(أ) $\frac{١}{\text{لو}_{٢}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٨}\ ١٢} + \frac{١}{\text{لو}_{٩}\ ١٢} = \text{لو}_{١٢}\ ٢ + \text{لو}_{١٢}\ ٨ + \text{لو}_{١٢}\ ٩$

$= \text{لو}_{١٢}\ (٢ \times ٨ \times ٩) = \text{لو}_{١٢}\ ١٤٤ = \text{لو}_{١٢}\ (١٢)^{٢} = ٢\ \text{لو}_{١٢}\ ١٢ = ٢$

(ب) $\text{لو}_{\text{أبجـ}}\ \text{أ} + \text{لو}_{\text{أبجـ}}\ \text{ب} + \text{لو}_{\text{أبجـ}}\ \text{جـ} = \text{لو}_{\text{أبجـ}}\ \text{أ ب جـ} = ١$

استخدام الآلة الحاسبة:

اللوغاريتمات المعتادة

هى اللوغاريتمات التى أساسها (١٠) ولا يكتب أسفل رمز اللوغاريتم

كيفية أيجاد لوغاريتم عدد استخدام مفتاح اللوغاريتم المعتاد هو [log]

(١) لإيجاد: لـو ٨,٤ نتبع الخطوات

[log] [8] [.] [5] [=]

يظهر على الشاشة العدد 0,9242792861

فيكون : لـو ٨,٤ = ٠,٩٢٤٢

(٢) لإيجاد قيمة س إذا كان لـو س = ٠,٤٥٧٢ نتبع الخطوات

[shift] [log] [0] [.] [4] [5] [7] [2] [=]

يظهر على الشاشة 2,86597276

فيكون : س ≃ ٢,٨٦٥٥

اللوغاريتم لأى أساس

(١) لإيجاد: $\text{لـو}_{٣}\ ٢٤$ نتبع الخطوات

[log□] [3] [2] [4] [=]

يظهر على الشاشة العدد 2,892789261

فيكون : $\text{لـو}_{٣}\ ٢٤ \simeq ٢,٨٩٢٨$

مثـــ١ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) س = ٢ لو ٧ ــ ٣ لو ٢ (ب) س = $\frac{\text{٣ لو ٥ ــ ٢ لو ٣}}{\text{٥ لو ٣ ــ لو ٧}}$

الحـــــــــــل

2 Log 7 – 3 Log 2 = 0.78

∴ س = ٠,٧٨

(3 Log 5 – 2 Log 3) ÷ (5 Log 3 – Log 7) = 0.74

∴ س = ٠,٧٤

مثـــ٢ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) لو س = ١,٥ (ب) س = $(٢,٣)^{١٠}$ (جـ) $(٤)^{س}$ = ٥٧

الحـــــــــــل

(أ) ∴ س = ٣١,٦ shift Log 1,5 = 31.6

(ب) بأخذ لوغاريتم الطرفين ⟸ لو س = لو $(٢,٣)^{١٠}$ = ١٠ لو ٢,٣

∴ س ≃ ٤,١٤ 10 × log 2,3 = shift log = 4,142651121

(جـ) بأخذ لوغاريتم الطرفين ⟸ س لو ٤ = ٥٧ ∴ س = لو ٥٧ ÷ لو ٤

∴ س ≃ ٢,٩١٦ Log 57 ÷ log 4 = 2,916445007

مثـــ٣ــال : إذا كان حجم الكرة ع يعطى من العلاقة ع = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣} أوجد باستخدام الحاسبة(اولا) قيمة ع عندما نق = ١٠سم (ثانيا) قيمة نق عندما ع = ١٥٠

الحـــــــــــل

(أولا) عندما : نق = ١٠سم ع = $\frac{٤}{٣}\pi(١٠)^{٣}$ = ٤١٨٨,٧٩ بالالة

4 ÷3 × sh exp × 10 x^{y} 3 = 4188.79

(ثانيا) عندما: ع = ١٥٠ ١٥٠ = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^{٣}

نق^{٣} = $\frac{١٥٠ \times ٣}{٤\pi}$ = ٣٥,٨ بأخذ اللوغاريتم ٣ لو نق = لو ٣٥,٨

∴نق ≃ ٣,٣ سم Log 35,8 ÷ 3 = shift log = 3,2958

مثــ٤ــال : أوجد مساحة سطح مكعب حجمه ١٢٠٠ سم^{٣}

الحـــــــــــل

حجم المكعب = ١٢٠٠ ⟸ ل^{٣} = ١٢٠٠ بأخذ لوغاريتم الطرفين

٣ لو ل = لو ١٢٠٠ ⟸ ل = (لو ١٢٠٠) ÷ ٣

∴ ل ≃ ١٠,٦٢٧ سم Log 1200 ÷ 3 = shift log = 10,62658569

حل آخر حجم المكعب = ١٢٠٠ ⟸ ل^{٣} = ١٢٠٠

∴ ل = $\sqrt[٣]{١٢٠٠}$ = ١٠,٦٢٧

مساحة المكعب = ٦ ل^{٢} = ٦ (١٠,٦٢٧)^{٢} = ٦٧٧,٥٤ سم^{٢}

مثــ٥ــال أوجد قيمة س التى تحقق أن

(أ) (٥)$^{س + ٢}$ = ١٢ (ب) (٥)$^{٢س - ٣}$ = (٣)$^{س + ٤}$

الحـــــــــــل

(أ) بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو ٥$^{س + ٢}$ = لو ١٢ ⟸ (س + ٢) لو ٥ = لو ١٢

س لو ٥ + ٢ لو ٥ = لو ١٢ ⟸ س لو ٥ = لو ١٢ ـ ٢ لو ٥

س = $\frac{\text{لو ١٢ ـ ٢ لو ٥}}{\text{لو ٥}}$ = ـ٠,٤٥

(ب) بأخذ لوغاريتم الطرفين

∴ لو (٥)$^{٢س - ٣}$ = لو (٣)$^{س + ٤}$ ⟸ (٢ س ـ ٣) لو ٥ = (س + ٤) لو ٣

٢س لو ٥ ـ ٣ لو ٥ = س لو ٣ + ٤ لو ٣ ⟸ ٢س لو٥ ـ س لو٣ = ٤ لو٣ + ٣ لو٥

∴ س (٢لو٥ ـ لو٣) = ٤ لو٣ + ٣ لو٥ ∴ س = $\frac{\text{٤ لو٣ + ٣لو٥}}{\text{٢لو٥ ـ لو٣}}$ = ٤,٣

مثـــ٦ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : $(٥)^{٢س+١} = ٧ \times (٣)^{س+٢}$

الحــــــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ لو $٥^{٢س+١}$ = لو($٧ \times ٣^{س+٢}$)

لو $٥^{٢س+١}$ = لو ٧ + لو $٣^{س+٢}$ ⇐ (٢س+١) لو ٥ = لو٧ + (س+٢) لو٣

٢س لو٥ + لو ٥ = لو٧ + س لو٣ + ٢لو٣

٢س لو٥ ــ س لو٣ = لو٧ + ٢لو٣ ــ لو ٥

س (٢لو٥ ــ لو ٣) = لو٧ + ٢ لو ٣ ــ لو٥

∴ س = $\frac{\text{لو ٧ + ٢ لو٣ ــ لو٥}}{\text{٢لو٥ ــ لو٣}}$ = ١,١٩

مثـــ٧ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : $(٨)^{٢س+١} \times (٩)^{س+٢} = ٢٧$

الحــــــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين ∴ لو($٨^{٢س+١} \times ٩^{س+٢}$)= لو ٢٧

لو $٨^{٢س+١}$ + لو $٩^{س+٢}$ = لو ٢٧

(٢س+١) لو ٨ +(س+٢) لو ٩ = لو٢٧

٢س لو٨ + لو٨ +س لو٩ + ٢لو ٩ = لو ٢٧

٢س لو ٨ + س لو ٩ = لو٢٧ ــ ٢لو٩ ــ لو٨

س(٢لو ٨ + لو ٩)= لو٢٧ ــ ٢لو ٩ ــ لو٨

∴ س = $\frac{\text{لو٢٧ ــ ٢ لو ٩ ــ لو٨}}{\text{٢ لو٨ + لو٩}}$ = -٠,٥

مثـــ٨ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : $٢^{٢س} - ٥ \times ٢^{س} + ٦ = ٠$

الحــــــــــل

نحلل : ($٢^{س}$ ــ ٢) ($٢^{س}$ ــ ٣) = ٠

$٢^{س}$ = ٢ ، أ $٢^{س}$ = ٣ ⇐ س = ١ ، أ لو $٢^{س}$ = لو٣

∴ س = ١ ، أ س = $\frac{\text{لو٣}}{\text{لو ٢}}$ = ١,٦ ∴ س = { ١ ، ١,٦ }

مثـــ٩ـــال أوجد قيمة س التى تحقق أن : ٢$^{\text{٢س}}$ − ٨ × ٢$^{\text{س}}$ + ١٥ = ٠

الحـــــــــل

نحلل : (٢$^{\text{س}}$ − ٣) (٢$^{\text{س}}$ − ٥) = ٠ ⟸ ∴ ٢$^{\text{س}}$ = ٣ أ، ٢$^{\text{س}}$ = ٥

لو ٢$^{\text{س}}$ = لو٣ أ، لو٢$^{\text{س}}$ = لو٥ ∴ س لو ٢ = لو٣ أ، س لو٢ = لو٥

∴ س = $\frac{\text{لو٣}}{\text{لو ٢}}$ = ١,٦ أ، س = $\frac{\text{لو٥}}{\text{لو ٢}}$ = ٢,٣ ∴ س = { ٢,٣ ، ١,٦ }

مثـــ١٠ـــال: إذا كان س ص = ٤ $\sqrt{\text{٢}}$ أوجد قيمة : ٥ لو$_{\text{٢}}$ س + ٤ لو$_{\text{٢}}$ ص − لو$_{\text{٢}}$س$^{\text{٣}}$ص$^{\text{٢}}$

الحـــــــــل

المقدار = لو$_{\text{٢}}$ $\frac{\text{س}^{\text{٥}} \times \text{ص}^{\text{٤}}}{\text{س}^{\text{٣}} \times \text{ص}^{\text{٢}}}$ = لو$_{\text{٢}}$ س$^{\text{٢}}$ص$^{\text{٢}}$ = لو$_{\text{٢}}$ (س ص)$^{\text{٢}}$

= لو$_{\text{٢}}$ (٤ $\sqrt{\text{٢}}$)$^{\text{٢}}$ = لو$_{\text{٢}}$ ٣٢ = لو$_{\text{٢}}$ ٢$^{\text{٥}}$ = ٥ لو$_{\text{٢}}$ ٢ = ٥ × ١ = ٥

مثـــ١١ـــال: إذا كان : ٧لوس + ٤ لوص − لوس$^{\text{٥}}$ ص$^{\text{٢}}$ = ٢(لو٢ + لو٣)

إثبت أن س = $\frac{\text{٦}}{\text{ص}}$

الحـــــــــل

لوس$^{\text{٧}}$ + لوص$^{\text{٤}}$ − لوس$^{\text{٥}}$ص$^{\text{٢}}$ = ٢ لو ٦

لو $\frac{\text{س}^{\text{٧}} \times \text{ص}^{\text{٤}}}{\text{س}^{\text{٥}} \times \text{ص}^{\text{٢}}}$ = لو ٦$^{\text{٢}}$ ⟸ لو س$^{\text{٢}}$ص$^{\text{٢}}$ = لو ٣٦

س$^{\text{٢}}$ص$^{\text{٢}}$ = ٣٦ ⟸ س ص = ٦ ∴ س = $\frac{\text{٦}}{\text{ص}}$

مثـــ١٢ـــال : إذا كان : $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = $\frac{\text{لو ٩}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{لو ٤٩}}{\text{لو ص}}$ أوجد قيمتى س ، ص

الحـــــــــل

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = $\frac{\text{لو (٣)}^{\text{٢}}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{لو (٧)}^{\text{٢}}}{\text{لو ص}}$

$\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٣}}{\text{لو ٣}}$ = $\frac{\text{٢ لو ٧}}{\text{لو ص}}$ ⟸ $\frac{\text{لو س}}{\text{لو ٥}}$ = ٢ = $\frac{\text{٢ لو ٧}}{\text{لو ص}}$

لو س = ٢ لو ٥ = لو (٥)$^{\text{٢}}$ = لو ٢٥ ∴ س = ٢٥

، ٢ لو ص = ٢ لو ٧ ∴ ص = ٧

تمـــارين على خواص اللوغاريتمات

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) ٢ لو$_{٦}$ ٢ + ٢ لو$_{٦}$ ٣ =

أ ٦ ب ٣٦ جـ ٢ د ١٢

(٢) لو$_{٢}$ ٥ × لو$_{٥}$ ٢ =

أ ١ ب ١٠ جـ $\frac{٥}{٢}$ د صفر

(٣) لو$_{٥}$ ٢ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٢}$ ٣ =

أ ٣٠ ب ١ جـ صفر د لو ٣٠

(٤) عَبِّر عن كلٍّ ممايأتى بدلالة لوس ، لو (س + ١)

أ لو س (س+١) ب لو $\frac{س}{س+١}$ جـ لو $\sqrt{س}$ (س+١)^{٢}

(٥) اختصْر لأبسطِ صورة:

أ لو$_{٦}$ ٥٤ - لو$_{٦}$ ٩ ب لو$_{٦}$ ٢ + لو$_{٦}$ ٣ جـ لو$_{٢}$ ١٢ + لو$_{٢}$ $\frac{٢}{٣}$

د لو ٤٨ + لو ١٢٥ - لو ٦ هـ $\frac{١ - لو ٢}{لو ١٢٥}$ و $\frac{لو ٤٩ + ٣ لو ٧}{لو ٧}$

ز لو$_{٢}$ ١٦ + لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$ + لو ٠,١ ح $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ أ + $\frac{١}{٢}$ لو$_{٣}$ ب + ٢ لو$_{٣}$ جـ - لو$_{٣}$ $\sqrt{أب}$ - لو$_{٣}$ ٣جـ^{٢}

(٦) أوجد فى ح مجموعة حلَّ كلٍّ من المعادلات الآتية:

أ لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س +٢) = ٣ ب لو س + لو (س -٣) = ١ جـ لو$_{٥}$ س - لو$_{٥}$ ٢ = ٢

د لو (س +٣) - لو ٣ = لو س هـ $\frac{١}{لو_{٢} س}$ + $\frac{١}{لو_{٢} س}$ = ٢ و لو س - $\frac{٣}{لوس}$ = ٢

(٧) أثبت أنَّ لو$_{ب}$ أ × لو$_{جـ}$ ب × لو$_{ء}$ جـ × لو$_{أ}$ ء = ١ ثم احسب قيمة لو$_{٢}$ ٣ × لو$_{٣}$ ٥ × لو$_{٥}$ ١٦

(٨) أوجد قيمة س فى كلٍّ مما يأتى مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد.

أ ٣^{س} = ٧ ب ٥$^{س-١}$ = ٢ جـ ٤ × ٧$^{س-٢}$ = ١ د ٢$^{س-٣}$ = ٣$^{س+١}$

امثلة عامة

مثال١ : إذا كانت س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ إثبت أن لو (س + $\text{س}^{-١}$) = ١

الحل

$\text{س}^{-١} = \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{٥ + ٢\sqrt{٦}} \times \frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٥ - ٢\sqrt{٦}} = \frac{٥ - ٢\sqrt{٦}}{٢٥ - ٢٤} = ٥ - ٢\sqrt{٦}$

الأيمن = لو (٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ + ٥ − ٢ $\sqrt{٦}$) = لو ١٠ = ١ الأيسر

مثال٢ : إذا كان س = ٨ − ٣ $\sqrt{٧}$ إثبت أن $\text{لو}_{٢}$ (س + $\text{س}^{-١}$) = ٤

الحل

$\text{س}^{-١} = \frac{١}{\text{س}} = \frac{١}{٨ - ٣\sqrt{٧}} \times \frac{٨ + ٣\sqrt{٧}}{٨ + ٣\sqrt{٧}} = \frac{٨ + ٣\sqrt{٧}}{٦٤ - ٦٣} = ٨ + ٣\sqrt{٧}$

الأيمن = $\text{لو}_{٢}$ (٨ − ٣ $\sqrt{٧}$ + ٨ + ٣ $\sqrt{٧}$) = $\text{لو}_{٢}$ ١٦

= $\text{لو}_{٢}$ $(٢)^{٤}$ = ٤ $\text{لو}_{٢}$ ٢ = ٤ الأيسر

مثال٣ : إذا كان س = ٢ − $\sqrt{٣}$ ، ص = ٢ + $\sqrt{٣}$ إثبت أن لو س ص = ١

الحل

س ص = (٢ + $\sqrt{٣}$) (٢ − $\sqrt{٣}$) = ٤ − ٣ = ١

المقدار لو س ص = لو ١ = صفر

مثال٤: حل المعادلة لو(س+٢) + لو(س - ٢) = ١ − لو٢

الحل

لو (س + ٢) (س − ٢) = لو ١٠ − لو ٢

لو $\text{س}^{٢}$ − ٤ = لو ٥ ⟸ $\text{س}^{٢}$ − ٤ = ٥ ∴ $\text{س}^{٢}$ = ٩

∴ س = ٣ ∴ م.ح = { ٣ }

مثـــ٥ـــال :أوجد قيمة س التى تحقق أن : لــو س = $\frac{(\text{لو}٥)^٢ - \text{لو}١٢٥}{\text{لو } ٠,٠٠٥}$

الحـــــــــل

لـو س = $\frac{(\text{لو}٥)^٢ - ٣\ \text{لو}٥}{\text{لو } ٥ - \text{لو } ١٠٠٠}$ = $\frac{\text{لو}٥\ [\ \text{لو}٥ - ٣\ ]}{\text{لو } ٥ - ٣}$ = لـو ٥

لـو س = لو ٥ ∴ س = ٥

مثــ٦ــــال : حل ل المعادلة س لو س = ١٠

الحـــــــــل

بأخذ لوغاريتم الطرفين

لو س لو س = لو ١٠ ⇐ لو س لو س = ١

(لو س)^٢ = ١ ∴ لو س = | ١ |

لو س = ١ ⇐ س = ١٠ ، أ لو س = -١ ⇐ س = ٠,١

∴ م.ح = { ١٠ ، ٠,١ }

مثــ٧ـــال : حل المعادلة س$^{\text{لو}_٢ \text{س}}$ = ٤ س

الحـــــــــل

بأخذ لوغاريتم للطرفين لـو$_٢$ س لو$_٢$ س = لو$_٢$ ٤ س

لـو$_٢$ س × لـو$_٢$ س = لـو$_٢$ ٤ + لو$_٢$ س ⇐ (لـو$_٢$ س)^٢ = ٢ + لـو$_٢$ س

(لو$_٢$ س)^٢ - لو$_٢$ س - ٢ = ٠ نحلل (لو$_٢$ س - ٢) (لو$_٢$ س + ١) = ٠

∴ لـو$_٢$ س = ٢ ∴ س = ٢^٢ = ٤ أ، لـو$_٢$ س = -١ ∴ س = ٢$^{-١}$ = $\frac{١}{٢}$

مثـــ٨ـــال : حل المعادلة لو $\sqrt[٣]{٣ \text{س} - ١}$ + لـو $\sqrt[٣]{\text{س} - ٢}$ = لـو٢

الحـــــــــل

لـو $\sqrt[٣]{(٣\text{س} - ١)(\text{س} - ٢)}$ = لو ٢

(٣ س - ١)$^{\frac{١}{٣}}$ × (س - ٢)$^{\frac{١}{٣}}$ = ٢ بالتكعيب (٣ س - ١) (س - ٢) = ٨

٣س^٢ - ٧ س +٢ = ٨ ⇐ ٣ س^٢ - ٧ س - ٦ = ٠

نحلل (٣س +٢) (س - ٣) = ٠ ∴ س = -$\frac{٢}{٣}$ ، س = ٣

تمارين عامة

[١] أوجد قيمة كل من :

(١) لو$_{٥}$ ٤٠ − لو$_{٥}$ ١٦ + لو$_{٥}$ ١٠

(٢) لو$_{٤}$ ٢ + لو$_{٤}$ ٥٦ − لو$_{٤}$ ٤٢ + لو$_{٤}$ ٢٤

(٣) لو٣ − لو ٤ + لو ١٢ − ٢ لو ٠.٣

(٤) لو$_{٩}$ ٠.٤ − ٢ لو$_{٩}$ $\frac{٣}{٢}$ ٣ + لو$_{٩}$ $\frac{٥}{٨}$

(٥) لو ٦٤ − لو ٦٠ − لو ٨ + لو٣ − لو٤

(٦) ٣لو $\frac{٥}{٣}$ − ٢لو $\frac{٥}{٧}$ − ٤لو $\frac{١}{٣}$ − لو $\frac{١}{٢}$ ٧٣

(٧) لو $\frac{٦}{٥}$ + ٢ لو $\frac{١٥}{٢}$ − ٥ لو٣ + لو٥ − لو $\frac{٥}{٣٦}$

(٨) ٢ لو٢٥ + لو $\frac{٨}{١٥}$ + $\frac{١}{٥}$ لو٢٤٣ + لو٠.٠١

[٢] إثبت أن :

(١) لو $\frac{٩٨}{٢٧}$ + لو $\frac{٢٥}{٤٩}$ − لو $\frac{١}{٥٤}$ = لو$_{٥}$ ٢٥

(٢) لو$_{٢}$ $\frac{٤٠}{١٣}$ − لو$_{٢}$ $\frac{٧}{١٢}$ + لو$_{٢}$ $\frac{٩١}{٦٠}$ = لو$_{٣}$ ٢٧

(٣) لو$_{٣}$ ٢٥ + لو$_{٣}$ ٧ − لو$_{٣}$ ١٧٥ = ٢ لو$_{٣}$ $\sqrt{٣}$

(٤) لو ٠.٧٥ + لو١٢ − ٢ لو٠.٣ = لو$_{٦}$ ٣٦

(٥) $\frac{\text{١ + لو ٢ − لو٤٥}}{\text{١ − لو ١٥}}$ = ٢

(٦) $\frac{\text{لو } \sqrt{١٢٥} + \text{لو ٢٧} - \text{لو } \sqrt{١٠٠٠}}{\text{لو٩ − لو ٢}}$ = $\frac{٣}{٢}$

[٣] أوجد قيمة س فيما يلى :

(١) لوس + لو٤.٩ = لو٣٥ − لو١٢٥ + لو١٧٥

(٢) لو س + لو٦٠ = لو٦٤ − لو٨ + لو ٣ − لو ٤

(٣) لو$_{٦}$ س = لو$_{٥}$ ١٠ − ٢ لو$_{٥}$ ٣ + ٠.٥ لو$_{٥}$ ٨١ − لو$_{٥}$ ٠.٤

(٤) لو$_{٢}$ س = لو ٣ + لو ١٢ − ٢ لو ٠.٣

(٥) لو(س − ١) + لو (س + ١) = لو ٨

(٦) لو(س − ١)^{٣} − ٣ لو(س − ٣) = لو ٨

(٧) لو$_{٢}$ س + لو$_{٢}$ (س + ٢) = ٣

(٨) لو$_{٣}$(س^{٢} + ٤س + ٤) − لو$_{٣}$ (٢ س − ٥) = لو$_{٥}$ ٢٥

(٩) لو$_{٢}$ (س^{٢} + ٦س + ٩) − لو$_{٢}$ (س − ١) = لو$_{٥}$ ٦٢٥

[٤] أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية : -

(١) (لو$_{٢}$ س)^{٢} + ٢ لو$_{٢}$ س = ٨　　(٢) (لو$_{٣}$ س)^{٢} – ٣ = ٢ لو$_{٣}$ س

(٣) لو س + $\frac{٢}{\text{لو س}}$ = ٣　　(٤) لو$_{٢}$ س + $\frac{٣}{\text{لو}_{٢}\text{ س}}$ = ٤

(٥) لو | س | = ٢　　(٦) لو$_{٣}$ | س + ١ | = ٢

(٧) لو (٨ – س) + ٢ لو $\sqrt{\text{س – ٦}}$ = ٠　　(٨) لو$_{٢}$ س = لو$_{٨}$ ٢٧

(٩) لو (٣ – س) + ٢ لو $\sqrt{\text{س – ٥}}$ = ٠　　(١٠) لو$_{٣}$ س = لو$_{٩}$ ٤

(١١) لو$_{٤}$ لو$_{٢}$ لو$_{٣}$ (٢ س + ١) = ٠　　(١٢) لو ٠,٢٥ = ٢٧ س^{٢} – ١٥ س

(١٣) لو$_{١}$ لو$_{٣}$ $\sqrt[٣]{\text{٢ س}}$ = ٠　　(١٤) (لو س + ١) لو ($\frac{\text{س}}{١٠}$) = ٣

(١٥) لو$_{٣}$ (س^{٢} – ٩) – لو$_{٣}$ (س – ٣) = ٢　　(١٦) ٢$^{(\text{لو س})^{٢}}$ × ٤$^{\text{لو س}}$ = ٢

(١٧) | س + ٣ | + (س + ٢)^{٢} = لو$_{٢}$ ٣٢ ، س ∈ ص

[٥] أجب عما يلى :

١) إذا كان : س ص = $\sqrt[٣]{٩}$ فأثبت أن : ٤ لو$_{٣}$ س + ٥ لو$_{٣}$ ص – لو$_{٣}$ س^{٢} ص^{٣} = ٥

٢) إذا كان : ب$^{\text{س}}$ – ٢ ب$^{-\text{س}}$ = ١ فإثبت أن : س لو ب = لو ٢ ؛ أ؛ س = لو$_{\text{ب}}$ ٢

٣) إذا كان: لو أ = جـ + لو ب فإثبت أن : أ = ب × ١٠$^{\text{جـ}}$

٤) إذا كان : ٣ لو أ – لو أ جـ^{٢} + ٤ لو جـ = ٢ (لو ٣ + لو ٤) فإثبت أن : أ جـ = ١٢

٥) إذا كان : لو$_{٢}$ د(س) = س فإثبت أن : د(١) × د(٢) × د(٣) = ٦٤

٦) إذا كان: $\sqrt[٥]{\text{س}}$ = $\sqrt[٧]{\text{ص}}$ = $\sqrt[٩]{\text{ع}}$ فإثبت أن : ص^{٢} = س ع

٧) إذا كان: لو٢ = ٠.٣٠١٠ ؛ لو٣ = ٠.٤٧٧١ فإوجد: لو٨ ؛ لو٦ ؛ لو٥

٨) إذا كان : لو$_{٢}$ ٥ = ٢.٣ ؛ لو$_{٢}$ ٧ = ٢.٨ فإوجد: لو$_{٢}$ ١٤ ؛ لو$_{٢}$ ٧٠

٩) إذا كان : لو$_{٣}$ ٦ = س فإثبت أن : لو$_{٩}$ ٨١ – لو$_{٣}$ (٢) = ٤ – س

١٠) إذا كان : لوس ص = ٤ – لو٥ ؛ لوص^{٤} = ٨ – لو١٦ فإوجد قيمة كلا من: س ؛ ص

١١) إذا كان : س = ٥ + ٢ $\sqrt{٦}$ فإثبت أن لو (س + س$^{-١}$) = ١

١٢) إذا كان : س = ٨ + ٣ $\sqrt{٧}$ فإثبت أن لو$_{٤}$ (س + س$^{-١}$) = ٢

١٣) إذا كان: لو س + لو(س − ١٥) = لو٣٥ − لو٧ + لو٢١ فأوجد قيمة : س

١٤) إذا كان : $\frac{\text{لوس}}{\text{لو٥}} = \frac{\text{لو٣٦}}{\text{لو٦}} = \frac{\text{لو٦٤}}{\text{لو ص}}$ فأوجد قيمة كلا من : س ؛ ص

١٥) إذا كان: $٣^{س - ٢} = ٣لو_{٢} ١٤ - ٤ لو_{٢} ٥ + ٢ لو_{٢} (\frac{٢٥}{}) - لو_{٢} ٧$ فأوجد قيمة : س

[٦] بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيمة س مقربا الناتج لرقميين عشريين

١) $٣^{س - ٢} = ٨.١$

٢) $٨^{س + ١} = ٩^{س - ١}$

٣) $٢^{٢س + ١} = ١٥٠$

٤) $٥^{س - ١} = (٦^{س} ÷ ٣٦)$

٥) $١٨^{٣س - ٥} = ٧.١٢$

٦) $(٣٦ ÷ ٦^{٤س}) × ٤^{٥ + س} = ٨$

[٧] بإستخدام حاسبة الجيب أوجد قيم س مقربا الناتج لرقم عشرى

١) $٢^{٢س} - ١٠ × ٢^{س} + ٢٤ = ٠$

٢) $٢٥^{س} - ١٢ × ٥^{س} + ٣٥ = ٠$

٣) $٣ × ٥^{٢س + ١} = ٢٥ × ٩^{س + ١}$

٤) $(١ + س)^{٣٠} = ١٠٠٠$

٥) إذا كان $د(س) = ٢^{س}$ ؛ د(٢س + ١) + د(٢س − ١) =٣٥

٦) إذا كان $د(س) = ٣^{س}$ ؛ د(س) + د(س − ٢) = ٢٠٠

٧) إذا كان $د_{١}(س) = ٨^{س}$ ؛ $د_{٢}(س) = ٤^{س}$ ؛ $د_{١}(٢ س) + د_{٢}(٣س - ١) = ٨٢$

[٨] تمارين على تمثيل الدالة

١) مثل منحنى الالدالة د(س) = $لو_{٢}$ س متخذا س ∋ [ـ١ـ ، ٨] ومن الرسم
أوجد قيمة $لو_{٢}$ ٥ , ٢

٢) مثل منحنى الدالة د(س) = $لو_{٣}$ س متخذا س ∋ [ـ١ـ ، ٢٧] ومن الرسم
أوجد قيمة $لو_{٣}$ ٤,٥

٣) مثل منحنى الدالة د(س) = $لو_{\frac{١}{٢}}$ س متخذا س ∋ [ـ١ـ ، ٨] ومن الرسم
أوجد قيمة $لو_{\frac{١}{٢}}$ ٣,٥ ؛ قيمة س عندما د(س) = ٢

٤) أوجد بيانيا مجموعة حل المعادلة : $لو_{٢}$ س = ٣ − س

مذكرة التفاضل

النهايات والأتصال

الصف الثانى الثانوى

القسم العلمى

الفصل الدراسى الأول

النهايـــات والأتصال

- مقدمة إيجاد النهاية تقدير النهاية عدديا وبيانيا
- نهاية دالة عند نقطة جبريا.
- نظرية (٤) القانون.
- نهاية دالة عند اللانهاية.
- نهاية الدوال المثلثية
- بحث وجود نهاية للدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

الكميات المعينة وغير المعينة وغير المعرفة

(١) مفاهيم ورموز وتمهيدات

ح = مجموعة الأعداد الحقيقية =] – ∞ ، ∞ [

$ح^+$ = مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة =] ٠ ، ∞ [

ح – = مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة =] – ∞ ، ٠ [

** أنواع الكميات :

(١) الكمية المعينة : هى الكمية التى لها جواب محدد مثل : ٣ – ٥ ، ٩ × ٨ ، ٧ ÷ ٤

(٢) الكمية غير المعرفة : هى الكمية التى لا معنى لها مثل : $\frac{م}{صفر}$ ، م ≠ ٠

(٢) الرمزان ∞ ، – ∞ :

❖ الرمز ∞ يرمز لأى كمية تكون أكبر من أى عدد حقيقى موجب يمكن إدراكه

❖ الرمز – ∞ يرمز لأى كمية تكون أصغر من أى عدد حقيقى سالب يمكن إدراكه

❖ إذا كان : م ∈ ح فإن : ∞ ± م = ∞ ، – ∞ ± م = – ∞

، ∞ × م = { ∞ عندما م > ٠ ، – ∞ عندما م < ٠ ، كمية غير معينة عندما م = ٠ }

– ∞ × م = { – ∞ عندما م > ٠ ، ∞ عندما م < ٠ ، كمية غير معينة عندما م = ٠ }

(٣) الكمية الغير المعينة : هى الكمية التى لا نستطيع أن نجد لها جواباً محدداً حيث يكون لها عدد لا نهائى من الحلول مثل : $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معينة "

* يوجد عدد لا نهائى من الأعداد الحقيقية إذا ضربت فى صفر كان الناتج = صفراً

∵ ٠ × أى عدد = ٠ ∴ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ × أى عدد = ∞ ∴ $\frac{\infty}{\infty}$ = أى عدد (غير معينة)

∵ ∞ + أى عدد = ∞ ∴ ∞ − ∞ = أى عدد (غير معينة)

∵ $\frac{\text{أى عدد}}{\infty}$ = صفر ∴ ٠ × ∞ = أى عدد (غير معينة)

العامل الصفرى :

إذا كانت د دالة فى المتغير س على صورة كثيرة حدود من درجة ن وكانت

د (؋) = ٠ حيث ؋ ∈ ح فإن المقدار (س ـ ؋) يسمى العامل الصفرى للدالة د

وهذا يعنى أن : د (س) يقبل القسمة على (س ـ ؋) بدون باق

أى أن : د (س) = (س ـ ؋) × كثيرة حدود أخرى

** مفهوم الرمز " ⟵ " فى النهايات :

س ؋ س
⟵ ٢ ⟶

إذا تصورنا أن س نقطة تتحرك على خط الأعداد

فإن موضعها عند كل نقطة أثناء حركتها يعين عدداً حقيقياً ما .

قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أكبر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليمي

أ، قيل أن س تقترب من العدد ٢ من خلال قيم أصغر قليلاً من العدد ٢ تقترب ٢ من اليسار

وإذا أقتربت س من العدد ٢ من جهة اليمين ومن اليسار قيل إن س تقترب من العدد ٢

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة : س ⟵ ٢

تقدّير النهاية عددياً وبيانياً

إذا أردنا إيجاد قيمة الدالة د : د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١}$ عند س = ١

بالتعويض عن قيمة س = ١ فإن د(١) = $\frac{(١)^٢ - ١}{١ - ١}$ = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

ولذلك نلجأ إلى دراسة نهاية د(س) عندما س تقترب إلى العدد (١)

[١] الطريقة العددية

	س تقترب جداً من (١) من اليمين ⟸						⟹ س تقترب جداً من (١) من اليسار				
س	١,٤	١,٣	١,٢	١,١	١,٠١	١	٠,٩٩	٠,٩	٠,٨	٠,٧	٠,٦
د(س)	٢,٤	٢,٣	٢,٢	٢,١	٢,٠١	غير معينة	١,٩٩	١,٩	١,٨	١,٧	١,٦
	د(س) تقترب جداً من (٢) من اليمين ⟸					⟹ د(س) تقترب جداً من (٢) من اليسار					

وهذة الطريقة تسمى $\lim_{\text{س} \to ١}$ د(س) = ٢

وتقرأ : نهاية د(س) عندما تقترب س من ١ تساوى ٢

تعريف :

إذا كانت قيمة الدالة د تقترب من قيمة وحيدة (ل) عندما تقترب س من ا من جهتى اليمين واليسار فإن نهاية د(س) تساوى (ل) وتكتب رمزياً $\lim_{\text{س} \to \text{ا}}$ د(س) = ل

[٢] تقدير النهاية بيانياً

د(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{\text{س} - ١}$ غير معينة عند س ⟵ ١

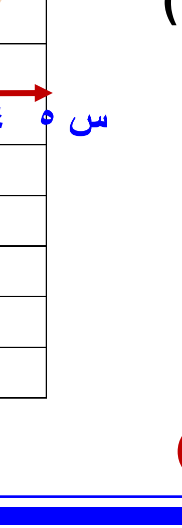
د(س) = $\frac{(\text{س} - ١)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ١)}$ = (س + ١)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ١+١=٢

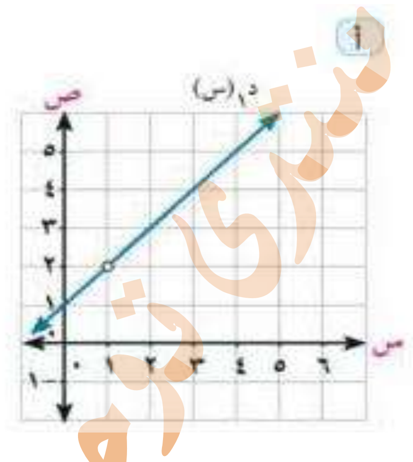
عندما : س ⟵ ١ من اليمين واليسار

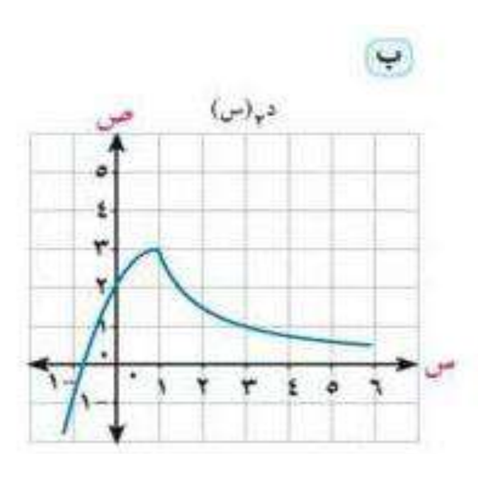
فإن د(س) ⟵ ٢ من فوق وتحت

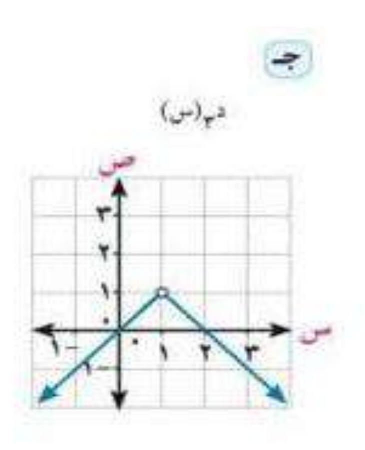
فيكون : $\lim_{\text{س} \to ١}$ د(س) = ٢



مثـــ١ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عندما س ⟵ ١





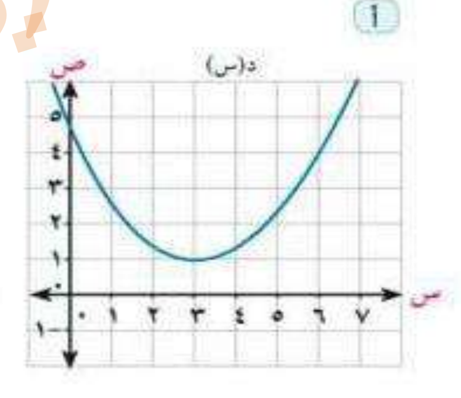


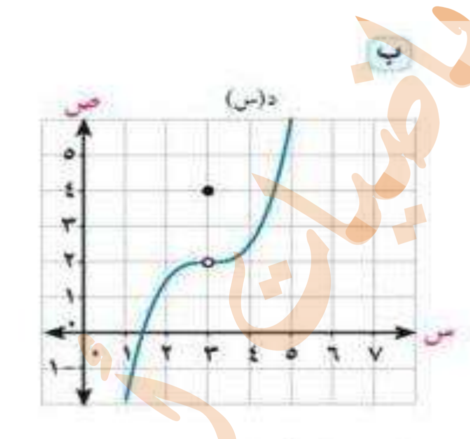
(أ) نهـــا د(س) = ٢   (س ⟵ ١)

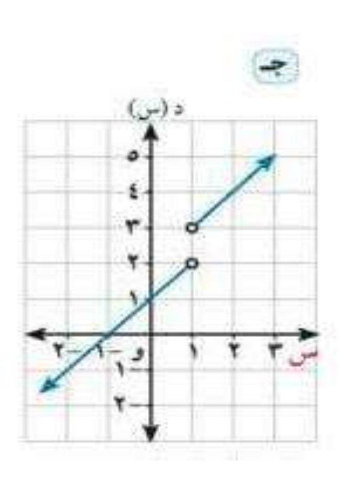
(ب) نهـــا د(س) = ٣   (س ⟵ ١)

(جـ) نهـــا د(س) = ١   (س ⟵ ١)

مثـــ٢ـــال : قدر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة







(أ) نهـــا د(س) = ١   (س ⟵ ٣)

(ب) نهـــا د(س) = ٢   (س ⟵ ٣)

ليس من الضرورى أن قيمة الدالة تساوى قيمة النهاية

(جـ) نهـــا د(س) =   (س ⟵ ١)

غير موجودة

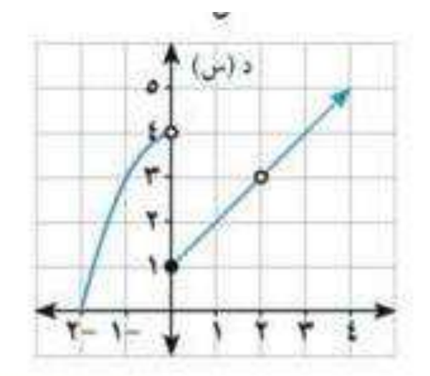
مثـــ٣ـــال : من الشكل البيانى المقابل

د(س) = ٢ − $س^٢$

(أ) نهـــا (٢ ـ $س^٢$) = ٢   (س ⟵ ٠)

(ب) د(صفر) = ٢

مثـــ٤ـــال : من الشكل البيانى المقابل



ⓐ د(٠) = ١   ⓑ د(٢) غير معرفة

ⓙ نهـــــــا د (س) = غير موجودة
س ← ٠

ⓓ نهـــــــا د (س) = ٣
س ← ٢

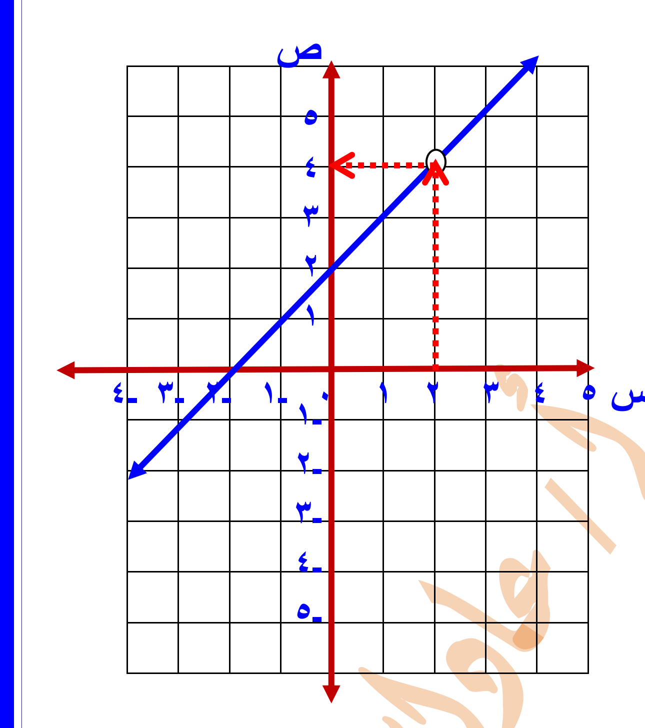
مثـــ٥ـــال: أكمل الجدول الآتى وأستنتج نهـــــــا $\frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$
س ← ٢

س	١,٩	١,٩٩	١,٩٩٩	٢	٢,٠٠١	٢,٠١	٢,١
د(س)	٣,٩	٣,٩٩	٣,٩٩٩	٤	٤,٠٠١	٤,٠١	٤,١

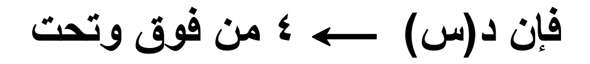
د(س) = $\frac{(س^٢ - ٤)}{(س - ٢)}$ غير معينة عند س ← ١

د(س) = $\frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)}$ = (س + ٢)

ومن الرسم نجد أن د (س) = ٢+٢ = ٤



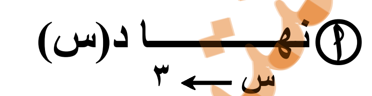
عندما : س ← ٢ من اليمين واليسار


فإن د(س) ← ٤ من فوق وتحت

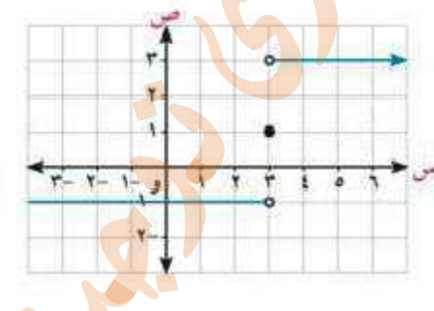
فيكون : نهـــــــا د(س) = ٤
س ← ٢

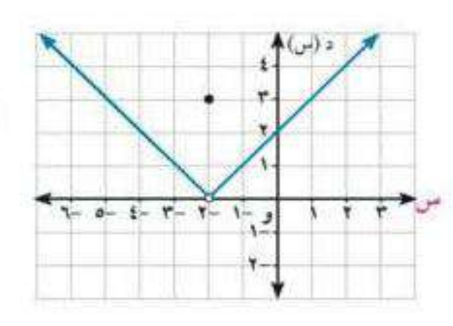
تمـــارين

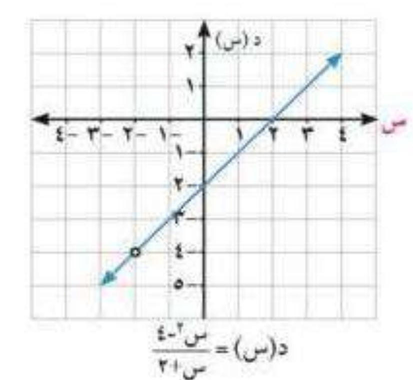
(١) قدّر نهاية الدالة د(س) عند النقط المبينة

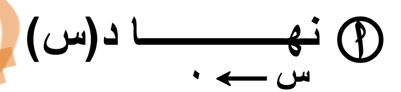
ⓐ $\lim\limits_{س \to ٣}$ د(س) ⓑ $\lim\limits_{س \to -٢}$ د(س) ⓒ $\lim\limits_{س \to ٢}$ د(س)







(٢) من الرسم البيانى أوجد

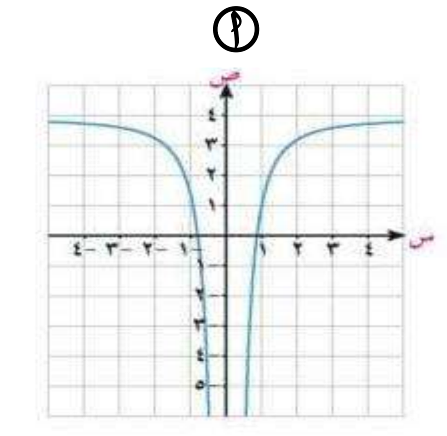


ⓐ $\lim\limits_{س \to ٠}$ د(س)

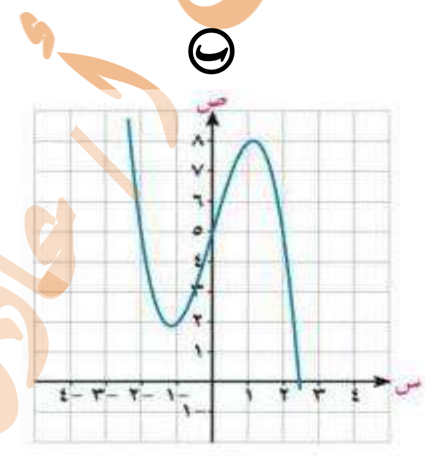
ⓑ د(٠)

(٣) قدّر نهاية الدالة د(س) عند س ⟵ صفر

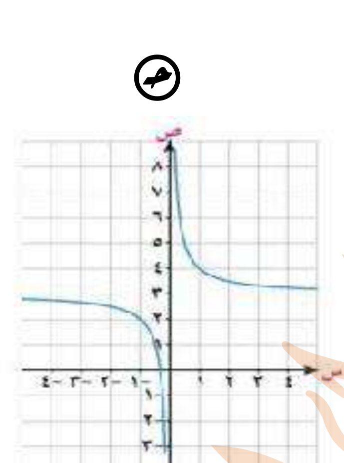
ⓐ



ⓑ



ⓒ



(٤) أكمل الجدول الآتى وأستنتج $\lim\limits_{س \to -١} \frac{(س^٢ - ١)}{(س - ١)}$

س	ـ١,١	ـ١,٠١	ـ١,٠٠١	ـ١	ـ٠,٩٩٩	ـ٠,٩٩	ـ٠,٩
د(س)				؟؟؟؟			

(٥) باستخدام الحاسبة قدّر نهاية الدوال الآتية

أ) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (٣س ـ ١)

ب) $\lim_{س \leftarrow ١}$ (س^٢ + ٢)

جـ) $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{(س - ١)}{(س^٢ - ١)}$

د) $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{(س^٢ - ٤س + ٣)}{(س - ٣)}$

نهاية دالة عند نقطة

مثال : إذا كانت د (س) = ٣ س + ٤ إوجد د (س) عندما س ← ٠

الحـــــــــــل

∵ س ← ١ ∴ نضع س = ١ + هـ حيث عندما س ← ١ فإن هـ ← ٠

∴ د (س) = ٣ (١ + هـ) + ٤ = ٣ + ٣ هـ + ٤ = ٧ + ٣ هـ

∴ د (س) ← ٧ عندما س ← ١

أى أن نهاية الدالة د(س) تساوى ٧ عندما س تؤول إلى ١

ويعبر عن ذلك بالصورة : $\lim_{س \leftarrow ١}$ (٣ س + ٤) = ٧

ملاحظة : فى المثال السابق نحصل على نفس النتيجة بالتعويض المباشر

نظرية : نهاية دالة كثيرة الحدود

نظـــرية (١)

* إذا كانت د (س) كثيرة حدود فى المتغير س فإن : $\lim_{س \leftarrow أ}$ د (س) = د (أ)

فمثلا : $\lim$ (٣ س + ٤) = د (٣) = ٣ × ٣ + ٤ = ١٣

نتيجة : نهاية الدالة الثابتة : إذا كانت د (س) = ك حيث ك ثابت

فإن : $\lim_{س \leftarrow أ}$ د : (س) = ك

فمثلا : د (س) = ٤ ، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ د(س) = ٤

نظرية (٢) : إذا كانت د ، ر دالتين فى المتغير س

وكانت : د (س) = ل ، ر (س) = م فإن :

(١) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ [د (س) ± ر (س)] = نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) ± نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ر (س)

= ل ± م

أى أن : نهاية المجموع الجبرى لدالتين (أو أكثر) = المجموع الجبرى لنهايتيهما

(٢) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ [د (س) × ر (س)] = نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) × نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ر (س)

= ل × م

أى أن : نهاية حاصل ضرب دالتين (أو أكثر) = حاصل ضرب نهايتيهما (النهايات)

(٣) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ ك × د (س) = ك نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) = ك × ل حيث ك ثابت

أى أن : نهاية حاصل ضرب ثابت × دالة = الثابت × نهاية هذه الدالة

(٤) نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ $\frac{\text{د (س)}}{\text{ر (س)}}$ = $\frac{\text{نـــها}_{س \leftarrow أ} \text{ د (س)}}{\text{نـــها}_{س \leftarrow أ} \text{ ر (س)}}$ = $\frac{ل}{م}$ حيث : م ≠ صفر

أى أن :

نهاية خارج قسمة دالتين = خارج قسمة نهايتيهما حيث : نهاية المقسوم عليه ≠ صفر

لإيجاد: نهـــا$_{س \leftarrow أ}$ د (س) نوجد د (أ) بالتعويض المباشر فإذا كان الناتج :

١ ـ عدداً حقيقياً فإن نهاية الدالة عند س = أ هى هذا العدد الحقيقى

٢ ـ $\frac{\text{عدداً حقيقى} \neq \text{الصفر}}{\text{صفر}}$ " كمية غير معرفة " فإن الدالة لا يكون لها نهاية عند أ

٣ ـ $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة تستخدم النظرية التالية

٤ ـ $\frac{أ}{\pm \infty}$ = صفر

نظرية (٣) : إذا كانت د ، ق دالتين فى المتغير س

وكانت د (س) = ق (س) لجميع قيم س فيما عدا عند س = ٢

وكانت : نهـــا ق (س) لها وجود (س ← ٢)

فإن : نهـــا ق (س) = نهـــا د (س) (س ← ٢)

تستخدم هذه النظرية لإيجاد نهاية دالة كسرية جبرية وفيها نختصر العامل الصفرى (س – ٢) فى كل من البسط والمقام ويسمى عن طريق عدة طرق :

منها (!) التحليل ، (!!) القسمة المطولة ، (!!!) الضرب فى المرافق ....

مراجعة على التحليل : يراعى أولا إخراج العامل المشترك الأعلى

الفرق بين مربعين : $س^٢ – ٩ = (س – ٣) (س + ٣)$

الفرق بين مكعبين : $س^٣ – ٨ = (س – ٢) (س^٢ + ٢ س + ٤)$

مجموع مكعبين : $س^٣ + ٢٧ = (س + ٣) (س^٢ – ٣ س + ٩)$

المقدار الثلاثى : إذا كان معامل $س^٢ = ١$

$س^٢ + ٥ س + ٦ = (س + ٣)(س + ٢)$

$س^٢ + ٥ س – ٦ = (س – ١)(س + ٦)$

$س^٢ – ٦ س – ١٦ = (س – ٨)(س + ٢)$

إذا كان معامل $س^٢ \neq ١$

$٣ س^٢ + ١١ س + ٦ = (س + ٣)(٣ س + ٢)$

$٢ س^٢ – ٥ س + ٢ = (٢ س – ١)(س – ٢)$

$٣ س^٢ + ٧ س – ٦ = (س + ٣)(٣ س – ٢)$

$٣ س^٢ – ١٧ س – ٦ = (س – ٦)(٣ س + ١)$

المقدار الثلاثى المربع الكامل :

$س^٢ + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^٢$

$٢٥ س^٢ – ٤٠ س + ١٦ = (٥ س – ٤)^٢$

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـال١ : $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س + ٤}{س + ٥}$

الحـل

بالتعويض نجد أن : $\lim_{س \to ١} \frac{٣ س + ٤}{س + ٥} = \frac{٣ \times ١ + ٤}{١ + ٥} = \frac{٧}{٦}$

مثـال٢ : $\lim_{س \to -١} \frac{٣ س + ٤}{س + ١}$

الحـل

بالتعويض نجد أن :

$\lim_{س \to -١} \frac{٣ س + ٤}{س + ١} = \frac{٣ \times (-١) + ٤}{-١ + ١} = \frac{١}{٠}$ كمية غير معرفة

∴ الدالة ليس لها نهاية أو النهاية ليس لها وجود

إستخدام التحليل لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثـال٣ : $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$

الحـل

بالتعويض عن : س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{(٣)^٢ - ٩}{٣ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ - ٩}{س - ٣} = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٣)}$

$= (س + ٣) = ٦$

مثـال٤ : $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢}$

الحـل

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{(٢)^٢ - ٥ \times ٢ + ٦}{٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س - ٣)}{(س - ٢)}$

$= (س - ٣) = -١$

مثـــ٥ـــال : $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ـ ٣ نجد أن : د (ـ ٣) = $\frac{٩ - ٩}{٩ - ٣ - ٦}$ = $\frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

∴ $\lim_{س \to -٣} \frac{س^٢ + ٣ س}{س^٢ + س - ٦} = \lim_{س \to -٣} \frac{س (س + ٣)}{(س - ٢) (س + ٣)}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{س}{(س - ٢)} = \frac{-٣}{-٣ - ٢} = \frac{٣}{٥}$

إستخدام القسمة المطولة لإيجاد نهاية دالة عند نقطة :

مثـــ٦ـــال : $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦}{س^٢ - ٤س + ٣}$

الحـــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣^٣ - ٤ \times ٣^٢ + ٣ + ٦}{٣^٢ - ٤ \times ٣ + ٣}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ (س - ٣) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

بإجراء قسمة مطولة للبسط على (س - ٣) " لصعوبة تحليل البسط "

∵ $س^٣ - ٤ س^٢ + س + ٦$	س - ٣
$س^٣ - ٣ س^٢$	$س^٢ - س - ٢$
$- س^٢ + س + ٦$	
$- س^٢ + ٣ س$	
$- ٢ س + ٦$	
$- ٢ س + ٦$	
....	

∴ $\lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣) (س^٢ - س - ٢)}{(س - ٣) (س - ١)} = \frac{٩ - ٣ - ٢}{٣ - ١} = ٢$

مثـــ٧ـــال : $\lim_{س \to ١} \frac{س^٣ - ٢س + ١}{س^٢ + ٣س - ٤}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

(١) نكتب معاملات المقسوم مرتبة تنازلياً وتساوى المقسوم علية بالصفر للحصول على قيمة س كما بالشكل

(٢) أترك أول معامل ثم أضرب المعامل الأول فى قيمة س وأكتب الناتج أسفل المعامل الثانى وأجمع

(٣) كرر عمليتى الضرب والجمع

نجد أن معاملات خارج القسمة هى: ١ ، ـ١ ، ـ١

على الترتيب فإن خارج القسمة هو $\text{س}^{٢}$ ـ س ـ ١

١	ـ ٢	٠	+١	١
	١	□	□	
١	ـ ١			
١	+ ـ٢	٠	+ ١	
١	ـ ١	ـ ١	ـ١	
١	ـ ١	ـ ١	٠	

خارج القسمة

$\text{س}^{٢}$ ـ س ـ ١

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ١} \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} - \text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)(\text{س} + ٤)} = \frac{١ - ١ - ١}{١ + ٤} = \frac{١}{٥}$

مثــ٨ــال : $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٧\text{س} + ٦}{٣\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ٤}$

الحـــــــــــل

بالتعويض عن س = ١ نجد أن : د (١) = $\frac{(١)^{٣} - ٧ \times ١ + ٦}{٣(١)^{٢} - ٨ \times ١ + ٤} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ غير معينة

∴ (س – ١) عامل مشترك بين البسط والمقام (العامل الصفرى)

يمكن استخدام طريقة مبسطة لإجراء القسمة بطريقة (القسمة التركيبية)

١	+ ٠	ـ ٧	٦	٢
	٢	□	□	
١	+ ٢	ـ ٧	ـ٦	
١	+ ٢	٤	ـ ٦	
١	+ ٢	ـ ٣	٠	

خارج القسمة

$\text{س}^{٢}$ + ٢ س ـ٣

∴ $\lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٢)(٣\text{س} - ٢)}$

$= \lim\limits_{\text{س} \to ٢} \frac{(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} - ٣)}{(٣\text{س} - ٢)}$

$= \frac{(٤ + ٤ - ٣)}{(٦ - ٢)} = \frac{٥}{٤}$

الضرب فى المرافق :

إذا وجد فرق بين جذرين تربيعيين لمقدارين جبريين (فى البسط أو المقام أو كليهما)

نضرب كلاً من البسط والمقام فى مرافق (فى البسط أو المقام أو كليهما)

مثــ٩ــال : $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{س^٢ + ٢ س}{\sqrt{س + ٩} - ٣}$

الحـــــــــــــل

بالتعويض عن س = ٠ نجد أن : د (٠) = $\frac{(٠)^٢ + ٢ \times ٠}{\sqrt{٠ + ٩} - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$ غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ٩} + ٣$ نجد أن :

$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{س (س + ٢)(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(س + ٩) - ٩}$

$= (٠ + ٢) (\sqrt{٠ + ٩} + ٣) = ١٢$

مثــ١٠ــال : $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \frac{س - ٣}{\sqrt{س + ١} - ٢}$

الحـــــــــــــل

بالتعويض عن س = ٣ نجد أن : د (٣) = $\frac{٣ - ٣}{\sqrt{٣ + ١} - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × مرافق المقام : $\sqrt{س + ١} + ٢$ نجد أن :

$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}{(س + ١) - ٤} = (\sqrt{٣ + ١} + ٢) = ٤$

مثــ١١ــال : $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} (\frac{س^٢ - س}{س - ٢} - \frac{٢}{س - ٢})$

الحـــــــــــــل

بتوحيد المقامات نجد أن :

$\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \frac{س^٢ - س - ٢}{س - ٢}$

بالتعويض عن س = ٢ نجد أن : د (٢) = $\frac{٢^٢ - ٢ - ٢}{٢ - ٢}$ = $\frac{صفر}{صفر}$

∴ $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ١)}{س - ٢}$ = ٢ + ١ = ٣

تمـــــــــــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(١) $\lim\limits_{س \to ٢}$ (س٣ - ١) = ... (٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣}$ = ...

(٣) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{س^٢ - ٤}{س + ٢}$ = ...

(٤) $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}}$ (٢س - جا س) = ...

(٥) إذا كان : $\lim\limits_{س \to ٢} \frac{أ}{س + ١}$ = ٤ فإن : أ = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim\limits_{س \to ٤}$ (٣س - $\sqrt{س}$) (أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ١٤ (د) ١٦

(٢) $\lim\limits_{س \to -٢} \frac{٣س^٢ - ١٢}{س + ٢}$ (أ) ١٨ (ب) -٣ (جـ) ١٢ (د) -١٢

(٣) $\lim\limits_{س \to ٣} \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ + س - ١٢}$ (أ) $\frac{٥}{٧}$ (ب) $\frac{١}{٧}$ (جـ) -١ (د) -٥

(٤) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{\sqrt{س + ١} - ١}{س}$ (أ) ٠ (ب) $\sqrt{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرفة

(٥) ∴ $\lim\limits_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{جا س}{س}$ (أ) ١ (ب) $\frac{\pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{\pi}$ (د) غير معرفة

أجد كلاً مما يأتى :

١	نهـا (س ← ٣) $\frac{س^{٢} + س + ٦}{س + ٣}$	٢	نهـا (س ← ٣) $\frac{س^{٢} + ٩}{س + ٣}$
٣	نهـا (س ← ٢) $\frac{س^{٢} + س - ٦}{س - ٢}$	٤	نهـا (س ← ٣) $\frac{س^{٢} - ٩}{س - ٣}$
٥	نهـا (س ← -٣) $\frac{س^{٢} + ٥س + ٦}{س + ٣}$	٦	نهـا (س ← ٣) $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س - ٣}$
٧	نهـا (س ← ٢) $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٤}$	٨	نهـا (س ← -٣) $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٩}$
٩	نهـا (س ← ١) $\frac{س^{٢} - ١}{٢س - ٢}$	١٠	نهـا (س ← ٢) $\frac{٣س^{٢} - ١٢}{س^{٣} - ٨}$
١١	نهـا (س ← ٥) $\frac{٢س - ١٠}{س^{٢} - ٥س}$	١٢	نهـا (س ← ١) $\frac{س^{٢} + ٣س - ٤}{س^{٢} - س}$
١٣	نهـا (س ← ٢) $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س^{٢} + ٢س - ٨}$	١٤	نهـا (س ← -٣) $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} + ٩س + ١٨}$
١٥	نهـا (س ← -١) $\frac{س^{٢} - ٥س - ٦}{س^{٢} - ١}$	١٦	نهـا (س ← ٤) $\frac{س^{٢} - ٧س + ١٢}{س - ٤}$
١٧	نهـا (س ← ٣) $\frac{٢س^{٢} - ٧س + ٣}{س - ٣}$	١٨	نهـا (س ← -١) $\frac{٣س^{٢} - س - ٤}{س^{٢} + ٣س + ٢}$

١٩	نهـا س ← ٢ $\frac{٢س^{٢} + ٣ س - ١٤}{٣س^{٢} - ٤ س - ٤}$	٢٠	نهـا س ← -١ $\frac{٢ س^{٢} + ٧ س + ٥}{٣س^{٢} + ٤ س + ١}$
٢١	نهـا س ← ٤ $\frac{٢ س^{٢} - ٧ س - ٤}{س^{٢} - ٧ س + ١٢}$	٢٢	نهـا س ← ٣ $\frac{٢س^{٢} - ٥ س - ٣}{س - ٣}$
٢٣	نهـا س ← ٣ $\left(\frac{س^{٢} + س - ١٢}{س^{٢} - ٩}\right)^{٢}$	٢٤	نهـا س ← $\frac{٢}{٣}$ $\left(\frac{٩ س^{٢} - ٤}{٣س - ٢}\right)^{٢}$
٢٥	نهـا س ← ٢ $\frac{س^{٣} - س - ٦}{س^{٢} - ٤}$	٢٦	نهـا س ← ١ $\frac{س^{٣} - ٢ س^{٢} + ١}{س^{٣} - ١}$
٢٧	نهـا س ← ٢ $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ٨ س + ١٢}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$	٢٨	نهـا س ← ٢ $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ٤ س - ٤}{س^{٢} + س - ٦}$

٢٩	نهـا س ← ٢ $\frac{س^{٣} + س - ١٠}{س^{٢} - ٤ س + ٤}$	٣٠	نهـا س ← ١ $\frac{س^{٣} + ٤ س^{٢} - س - ٤}{س^{٤} - ١}$
٣١	نهـا س ← ٥ $\frac{س - ٥}{\sqrt{س - ٤} - ١}$	٣٢	نهـا س ← -١ $\frac{\sqrt{س + ١٧} - ٤}{س + ١}$
٣٣	نهـا س ← ٠ $\frac{س^{٢} + ٢ س}{\sqrt{س + ٢٥} - ٥}$	٣٤	نهـا س ← ٠ $\frac{\sqrt{١ + س} - \sqrt{١ - س}}{٢ س}$
٣٥	نهـا س ← -١ $\frac{\sqrt{س^{٢} - س + ٢} - ٢}{\sqrt[٣]{س^{٣} + ١}}$	٣٦	نهـا س ← ٣ $\frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{\sqrt{٧ - س} - ٢}$

نظرية ٤ : نهاية دالة (بالقانون)

$$\underset{س \leftarrow م}{نهـــا} \frac{س^ن - م^ن}{س - م} = ن \times م^{ن-١}$$ لكل: ن ∈ ح − { ٠ }

نتيجة:

$$\underset{س \leftarrow م}{نهـــا} \frac{س^ن - م^ن}{س^م - م^م} = \frac{ن}{م} \times م^{ن-م}$$ لكل: ن ، م ∈ ح − { ٠ }

مثال١ : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س^٥ + ٣٢}{س + ٢} = \frac{٣٢ + ٣٢}{٢ + ٢} = ١٦$ " معرفة "

مثال٢ : $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا} \frac{س^٤ + ٨١}{س - ٣} = \frac{٨١ + ٨١}{٣ - ٣} = \frac{١٦٢}{صفر}$ كمية غير معرفة

مثال٣ : $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س^٧ - ١٢٨}{س - ٢}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : د (٢) = $\frac{١٢٨ - ١٢٨}{٢ - ٢} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

∴ المقدار = $\underset{س \leftarrow ٢}{نهـــا} \frac{س^٧ - ٢^٧}{س - ٢} = ٧ \times ٢^{٧ - ١} = ٥ \times ٢^٦ = ٣٢٠$

مثال٤ : $\underset{س \leftarrow -٤}{نهـــا} \frac{س^٣ + ٦٤}{س + ٤}$

الحـــل

بالتعويض نجد أن : د (ـ ٤) = $\frac{- ٦٤ + ٦٤}{- ٤ + ٤} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

∴ المقدار = $\underset{س \leftarrow -٤}{نهـــا} \frac{س^٣ - (-٤)^٣}{س - (-٤)}$

$= ٣ \times (-٤)^{٣ - ١} = ٣ \times (-٤)^٢ = ٤٨$

مثـ٥ـال : نهـــا

$$\lim_{\text{س} \to \sqrt{٥}} \frac{\text{س}^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\text{س} - ٥}$$

الحـــــل

بالتعويض نجد أن : د $(\sqrt{٥}) = \frac{(\sqrt{٥})^{٧} - ١٢٥\sqrt{٥}}{\sqrt{٥} - \sqrt{٥}} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية فير معينة

∴ المقدار = $\lim_{\text{س} \to \sqrt{٥}} \frac{\text{س}^{٧} - (\sqrt{٥})^{٧}}{\text{س} - (\sqrt{٥})} = ٧ \times (\sqrt{٥})^{٦} = ٧ \times ٥^{٣} = ٨٧٥$

مثـ٦ـال : نهـــا

$$\lim_{\text{س} \to -\frac{٣}{٢}} \frac{٣٢\,\text{س}^{٥} + ٢٣٤}{٤\,\text{س} - ٩}$$

الحـــــل

بالتعويض نجد أن : د $(-\frac{٣}{٢}) = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

عندما : س ← $-\frac{٣}{٢}$ فإن : ٢ س ← − ٣

∴ المقدار = $\lim_{٢\text{س} \to -٣} \frac{(٢\,\text{س})^{٥} - (-٣)^{٥}}{(٢\,\text{س})^{٢} - (-٣)^{٢}} = \frac{٥}{٢} \times (-٣)^{٣} = \frac{-١٣٥}{٢}$

مثـ٧ـال : نهـــا

$$\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{\text{س}}$$

الحـــــل

بالتعويض نجد أن : د $(٠) = \frac{(٠ + ٥)^{٤} - ٦٢٥}{٠} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ كمية غير معينة

بإضافة : (+ ٥ ، − ٥) للمقام

، وعندما : س ← ٠ فإن : (س + ٥) ← ٥

∴ المقدار = $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(\text{س} + ٥) - ٥}$

$= \lim_{\text{س}+٥ \to ٥} \frac{(\text{س} + ٥)^{٤} - (٥)^{٤}}{(\text{س} + ٥) - ٥} = ٤ \times ٥^{٣} = ٥٠٠$

مثـــال ٨ : $\lim\limits_{س \to ٦} \frac{(س - ٥)^{٧} - ١}{س - ٦}$

الحـــــــل

بالتعويض نجد أن : د (٦) = $\frac{(٦ - ٥)^{٧} - ١}{٦ - ٦} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بوضع: (- ٦) = (- ٥ - ١) بالمقام ، وعندما : س ← ٦ فإن : (س - ٥) ← ١

∴ المقدار = $\lim\limits_{س \to ٦} \frac{(س - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(س - ٥) - ١}$

= $\lim\limits_{س - ٥ \to ١} \frac{(س - ٥)^{٧} - (١)^{٧}}{(س - ٥) - ١} = ٧ \times ١^{٦} = ٧$

مثـــال ٩ : $\lim\limits_{و \to ٠} \frac{(س + ٥ و)^{٧} - س^{٧}}{٣ و}$

الحـــــــل

بالتعويض نجد أن : د (٠) = $\frac{(س + ٥ \times ٠)^{٧} - س^{٧}}{٣ \times ٠} = \frac{صفر}{صفر}$ كمية غير معينة

بالضرب بسطاً ومقاماً × $\frac{٥}{٣}$ ، إضافة (+ س ، - س) بالمقام

، وعندما : و ← ٠ ⟸ ٥ و ← ٠ ∴ (س + ٥ و) ← س

∴ المقدار = $\lim\limits_{و \to ٠} \frac{\frac{٥}{٣}(س + ٥ و)^{٧} - (س)^{٧}}{\frac{٥}{٣}(٣ و) + س - س}$

= $\frac{٥}{٣} \lim\limits_{س + ٥ و \to س} \frac{(س + ٥ و)^{٧} - (س)^{٧}}{(س + ٥ و) - س} = \frac{٥}{٣} \times ٧ \times س^{٦} = \frac{٣٥}{٣} س^{٦}$

تمـــارين

أكمـــــــل ما يأتى

(٢) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{٩} - ١}{\text{س}^{٥} - ١} =$ ......   (٢) $\lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩} =$ ....

(٣) $\lim_{\text{س} \to -٢} \frac{\text{س}^{٤} - ١٦}{\text{س}^{٣} + ٨} =$ ....

(٤) $\lim_{\text{س} \to ٠} \frac{(\text{س} + ١)^{٩} - ١}{\text{س}} =$ ....

(٥) إذا كان : $\lim_{\text{س} \to \text{ك}} \frac{\text{س}^{٥} - \text{ك}^{٥}}{\text{س} - \text{ك}} = ٨٠$ فإن : ك = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(٦) $\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} - ٣٢}{\text{س} - ٢}$ (أ) ١٦   (ب) ٥×١٦   (جـ) ٦٤   (د) ٣٢

(٧) $\lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{س}^{٥} + ١}{\text{س} + ١}$ (أ) ٥   (ب) ٤   (جـ) −٥   (د) −٤

(٨) $\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(\text{س} + \text{هـ})^{٧} - \text{س}^{٧}}{\text{هـ}}$ (أ) $\text{س}^{٧}$ (ب) $٧\text{س}^{٦}$ (جـ) صفر   (د) ١

(٩) $\lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{س}^{١٣} - ١}{\text{س}^{١٩} - ١}$ (أ) $\frac{١٣}{١٩}$ (ب) $\frac{١٩}{١٣}$ (جـ) −٦   (د) $١\frac{١٣}{١٩}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\lim_{\text{س} \to ٣} \frac{\text{س}^{٥} - ٢٤٣}{\text{س} - ٣}$	٢	$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٦} - ٦٤}{\text{س} - ٢}$
٣	$\lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س}^{٥} + ٣٢}{\text{س} + ٢}$	٤	$\lim_{\text{س} \to -\sqrt{٣}} \frac{\text{س}^{٧} - ٢٧\sqrt{٣}}{\text{س} + \sqrt{٣}}$

٥	$\underset{س \to 2}{\text{نهـا}} \frac{س^{4} - 16}{2س - 4}$	٦	$\underset{س \to 1}{\text{نهـا}} \frac{3س^{6} - 3}{س - 1}$
٧	$\underset{س \to 3}{\text{نهـا}} \frac{س^{5} - 81س}{س - 3}$	٨	$\underset{س \to -2}{\text{نهـا}} \frac{س^{4} - 16}{س^{2} + 2س}$
٩	$\underset{س \to -2}{\text{نهـا}} \frac{س^{7} + 128}{س^{3} + 8}$	١٠	$\underset{س \to -3}{\text{نهـا}} \frac{س^{4} - 81}{س^{3} + 27}$
١١	$\underset{س \to \sqrt{2}}{\text{نهـا}} \frac{س^{5} - 4\sqrt{2}}{س^{2} - 2}$	١٢	$\underset{س \to -\sqrt{5}}{\text{نهـا}} \frac{س^{5} - 25\sqrt{5}}{س^{2} - 5}$
١٣	$\underset{س \to \frac{3}{2}}{\text{نهـا}} \frac{32س^{5} - 243}{8س^{3} - 27}$	١٤	$\underset{س \to -\frac{5}{2}}{\text{نهـا}} \frac{16س^{4} - 625}{8س^{3} + 125}$
١٥	$\underset{2س \to -1}{\text{نهـا}} \frac{16س^{4} - 1}{128س^{7} + 1}$	١٦	$\underset{2س \to \sqrt{3}}{\text{نهـا}} \frac{8س^{3} - 3\sqrt{3}}{2س - \sqrt{3}}$
١٧	$\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نهـا}} \frac{س^{5} - 128س^{12}}{س^{2} - 16س^{6}}$	١٨	$\underset{س \to \frac{1}{2}}{\text{نهـا}} \frac{16س^{4} - 1}{2س - 1}$
١٩	$\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س + 2)^{4} - 16}{س}$	٢٠	$\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س + 3)^{4} - 81}{س}$
٢١	$\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س - 1)^{5} + 1}{س}$	٢٢	$\underset{س \to -3}{\text{نهـا}} \frac{(س + 2)^{5} + 1}{س + 3}$
٢٣	$\underset{س \to 0}{\text{نهـا}} \frac{(س + 1)^{5} - 1}{س^{2} + س}$	٢٤	$\underset{س \to 3}{\text{نهـا}} \frac{(س - 2)^{6} - 16}{س^{2} - 3س}$

٢٥	$\underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٤}$	٢٦	$\underset{س \to -٣}{نهـا} \frac{(\ \ + ٢)^{٥} + ١}{س + ٣}$
٢٧	$\underset{س \to -١}{نهـا} \frac{(س + ٢)^{٦} - ١}{(س + ٢)^{٣} - ١}$	٢٨	$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{(١ + ٣ س)^{٧} - ١}{٤ س}$
٢٩	$\underset{س \to ٠}{نهـا} \frac{(٢ س + ١)^{٥} - ١}{٥ س}$	٣٠	$\underset{هـ \to ٠}{نهـا} \frac{(س + ٥ هـ)^{٩} - س^{٩}}{٦ هـ}$
٣١	$\underset{و \to ٠}{نهـا} \frac{(س + ٤ و)^{٦} - س^{٦}}{و}$	٣٢	$\underset{و \to ٠}{نهـا} \frac{(س + ٣ و)^{٨} - س^{٨}}{٤ و}$
٣٣	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{(س - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$	٣٤	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{(س^{٢} - ٣)^{٦} - ١}{س - ٢}$
٣٥	$\underset{س \to -٣}{نهـا} \frac{(س + ١)^{٣} + ٨}{س^{٢} - س - ١٢}$	٣٦	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{س^{٧} + س^{٥} - ١٦٠}{س - ٢}$
٣٧	$\underset{س \to ٣}{نهـا} \frac{(س - ٢)^{٥} + س - ٤}{٣ س - ٩}$	٣٨	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{١٦ س^{-٤} - ١}{س - ٢}$
٣٩	$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{\sqrt[٧]{س} - ١}{\sqrt[٤]{س} - ١}$	٤٠	$\underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{س^{٣}\sqrt{س} - ١٢٨}{س - ٤}$
٤١	$\underset{س \to ٢}{نهـا} \frac{\sqrt[٣]{س + ٦} - ٢}{س - ٢}$	٤٢	$\underset{س \to ١}{نهـا} \frac{\sqrt[٣]{س + ٢٦} - ٣}{س - ١}$
٤٣	$\underset{س \to ٤}{نهـا} \frac{س - ٤}{\sqrt{س} - ٢}$	٤٤	$\underset{س \to ٩}{نهـا} \frac{س - \sqrt{٣}}{س - ٩}$

٤٥) $\lim_{س \to ١} \left(\frac{س - ١}{\sqrt{س + ٣} - ٢} \times \frac{س^٦ - ١}{س^٣ - ١} \right)$

٤٦) $\lim_{س \to -١} \left(\frac{س + ١}{\sqrt{٣ - س} - ٢} - \frac{س^{١٠} - س}{س^{١٣} - س} \right)$

٤٧) $\lim_{س \to ٢} \left(\frac{١}{س^٤ - ١٦} \times \frac{(س^٥ - ٣٢)^٣}{(س - ٢)^٢} \right)$

٤٨) $\lim_{س \to ٤} \frac{س \sqrt{س - ٣} - ٤}{س - ٤}$

٤٩) إذا كانت : $\lim_{س \to ١} \frac{س^٢ + (م - ١) س - م}{س - ١} = ٤$ أوجد قيمة : م

٥٠) إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٥ - ٤ س & ، س < ٠ \\ ٢ س^٢ - ١ & ، س > ٠ \end{cases}$

أوجد : $\lim_{س \to -٢}$ د (س) ، $\lim_{س \to ٥}$ د (س)

٥١) إذا كانت : $\lim_{س \to م} \frac{س^٨ - م^٨}{س^٦ - م^٦} = ١٢$ أوجد قيمة : م

٥٢) إذا كانت : د (س) = س^٤ أوجد : $\lim_{س \to ٣} \frac{د(س) - د(٣)}{س - ٣}$

نهاية الدالة عند اللانهاية

إذا كانت د (س) تقترب من قيمة حقيقية معينة (ل مثلاً) عندما تقترب س من اللانهاية فإننا نقول أن الدالة لها نهاية

ونعبر عن ذلك رمزياً بالصورة $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س}) = \text{ل}$

نظرية (١) : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{١}{\text{س}} = \text{صفر}$

نتيجة (١) : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{ا}}{\text{س}} = \text{صفر}$ حيث : $\text{ا} \in \text{ح} - \{٠\}$

نتيجة (٢) : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{ا}}{\text{س}^{\text{ن}}} = \text{صفر}$ حيث : $\text{ا} \in \text{ح} - \{٠\}$ ، $\text{ن} \in \text{ح}^{+}$

تستخدم النظرية ونتائجها فى إيجاد $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س})$ حينما

(١) تكون الدالة د على شكل كسر جبرى

(٢) كان التعويض المباشر يعطى $\frac{\infty}{\infty}$ ، أ، $\infty - \infty$

وذلك بأن نقسم كلاً من البسط والمقام على (س) مرفوعاً لأعلى قوة $^{\text{أس}}$ فى مقام الكسر

، أما إذا أعطى ($\infty - \infty$) فنضرب فى المرافق أولاً

ثم نقسم كلاً من البسط والمقام على المتغير (س) مرفوعاً لأعلى قوة (أس) فى المقام

أمثلة : أوجد كلاً مما يلى :

مثـــال ١ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^{٢} - ٣ س}{س^{٢} - ٢}$

الحــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٢}$

$$\therefore \text{المقدار} = \lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{س}}{١ - \frac{٢}{س^{٢}}} = \frac{٥ - ٠}{١ - ٠} = ٥$$

مثـــال ٢ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٥ س^{٣} - ٣ س + ٦}{٣ س - ٧ س^{٣}}$

الحــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٣}$

$$\therefore \text{المقدار} = \lim_{س \to \infty} \frac{٥ - \frac{٣}{س^{٢}} + \frac{٦}{س^{٣}}}{\frac{٣}{س^{٢}} - ٧} = \frac{٥ - ٠ + ٠}{٠ - ٧} = -\frac{٥}{٧}$$

مثـــال ٣ : $\lim_{س \to \infty} \frac{٣ س^{٢} + ٦}{٢ س - ٧ س^{٣}}$

الحــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^{٣}$

$$\therefore \text{المقدار} = \lim_{س \to \infty} \frac{\frac{٣}{س} + \frac{٦}{س^{٣}}}{\frac{٢}{س^{٢}} - ٧} = \frac{٠ + ٠}{٠ - ٧} = \text{صفر}$$

مثـــال ٤ : نهـــــا

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{9\text{س}^3 - 2\text{س} + 5}{2\text{س} - \text{س}^2}$$

الحـــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س^2

∴ المقدار = $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{9\text{س} - \frac{2}{\text{س}} + \frac{5}{\text{س}^2}}{\frac{2}{\text{س}} - 1} = \frac{9 \times \infty - 0 + 0}{0 - 1} = \frac{\infty}{1}$

∴ ليس للدالة نهاية (اكبر أس فى المقام)

مثـــال ٥ : نهـــــا

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(\text{س} - 2)(3\text{س}^2 + 1)}{(4\text{س} + 3)(5\text{س}^2 - 1)}$$

الحـــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س}^3 = \text{س} \times \text{س}^2 = \text{س}^2 \times \text{س}$

∴ المقدار = $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{(1 - \frac{2}{\text{س}})(3 + \frac{1}{\text{س}^2})}{(4 + \frac{3}{\text{س}})(5 - \frac{1}{\text{س}^2})} = \frac{(1 - 0)(3 + 0)}{(4 + 0)(5 - 0)} = \frac{3}{20}$

مثـــال ٦ : نهـــــا

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8\text{س}^3 + 1}}{\sqrt{9\text{س}^2 - 5}}$$

الحـــــــــــــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $\text{س} = \sqrt{\text{س}^2} = \sqrt[3]{\text{س}^3}$

∴ المقدار = $\lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \text{س}^{-3}}}{\sqrt{9 - 5\text{س}^{-2}}} = \frac{\sqrt[3]{8 + 0}}{\sqrt{9 - 0}} = \frac{2}{3}$

مثـال٧ : $\lim\limits_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} - \sqrt{\text{س}^2 - 1} \right)$

الحـــــــــل

∴ د (∞) = ∞ − ∞ = كمية غير معنة

بالضرب بسطاً ومقاماً × المرافق نجد :

$$\because \text{د(س)} = \left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} - \sqrt{\text{س}^2 - 1} \right) \times \frac{\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^2 - 1} \right)}{\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^2 - 1} \right)}$$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2 + \text{س} - \left(\text{س}^2 + 1 \right)}{\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^2 - 1} \right)}$$

$$= \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{\left(\text{س} - 1 \right)}{\left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} + \sqrt{\text{س}^2 - 1} \right)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على س $= \sqrt{\text{س}^2}$

$$\therefore \lim\limits_{\text{س} \to \infty} \frac{1 - \text{س}^{-1}}{\sqrt{1 - \text{س}^{-1}} + \sqrt{1 + \text{س}^{-2}}} = \frac{1 - 0}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

تمـــارين

أكمـــــل ما يأتى

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{٣}{س}$ = ...

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س}}{\sqrt{س - ٥}}$ = ...

(٣) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٥ + ٥ س^٢}{٣ س^٥ + س^٢ + ٨}$ = ...

(٤) $\lim_{س \to \infty} (\frac{٧}{س} + ٣)$ = ...

(٥) $\lim_{س \to \infty} (٣ س^{-٢} + ٧س^{-١} - ٥)$ = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) $\lim_{س \to \infty} \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ (أ) ٤ (ب) ٢ (ج) ٠ (د) ∞

(٢) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt{س+٣}}{\sqrt{س} + ٢}$ (أ) ٣ (ب) ١ (ج) ٠ (د) $\frac{٣}{٢}$

(٣) $\lim_{هـ \to \infty} \frac{(س+١)(٢س+٣)}{٣س^٢ + ٧س}$ (أ) $\frac{٣}{٢}$ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (ج) صفر (د) $\frac{٢}{٧}$

(٤) $\lim_{س \to \infty} \frac{\sqrt[٣]{٨س^٣ - ٧}}{\sqrt{٩س^٢ + ٣}}$ (أ) $\frac{٨}{٩}$ (ب) $\frac{-٧}{٣}$ (ج) $\frac{١}{١٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

أوجد كلاً مما يأتى :

١	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٤\text{س}^{٢} - ٣}{٥\text{س}^{٢} - ١}$	٢	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٣\text{س}^{٢} + ٤}{٢ - \text{س}^{٢}}$
٣	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٥\text{س}^{٢} - ٣\text{س} + ١}{٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ٥}$	٤	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٣\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ١}{٢ - ٦\text{س} - \text{س}^{٢}}$
٥	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٢\text{س}^{٤} - \text{س}^{٣} - ٤\text{س}}{٣\text{س}^{٥} - \text{س}^{٢} + ٧}$	٦	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٣\text{س}^{٣} - ٢}{٤ - ٣\text{س}^{٢}}$
٧	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٥\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} - ٣}{٣\text{س}^{٤} - \text{س} + ٧}$	٨	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٤} + ٣\text{س} - ١}{٦\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} + ٧}$
٩	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{٤\text{س}^{٣} + ٥\text{س}^{٢} - ٤}{(٣\text{س} + ١)(٢\text{س}^{٢} - ١)}$	١٠	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(٧\text{س} - ١)(\text{س}^{٢} + ٥)}{(\text{س} + ٤)(٢\text{س}^{٢} - \text{س})}$
١١	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س}^{٢}(\text{س} - ١)}{\text{س}(\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٢)}$	١٢	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{(٢\text{س} + ٥)(\text{س} - ١)(\text{س} + ٣)}{\text{س}(\text{س} - ٤)(٣\text{س} + ١)}$
١٣	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\text{س} - ١}{\sqrt{٤\text{س}^{٢} + ٧}}$	١٤	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{٩\text{س}^{٢} - \text{س} - ١}}{٢\text{س} + ٣}$
١٥	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[٣]{٢٧\text{س}^{٣} - ٥\text{س} + ٤}}{٤\text{س}^{٢} - ٣}$	١٦	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt{٢٥\text{س}^{٢} - ٦}}{\sqrt[٣]{٨\text{س}^{٣} - \text{س}}}$
١٧	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٣\text{س} + ١}}{\sqrt[٤]{١٦\text{س}^{٤} - ٥}}$	١٨	$\lim_{\text{س}\to\infty} \frac{\sqrt[٧]{\text{س}^{٧} - \text{س}^{٥} + \text{س}}}{\sqrt[٥]{\text{س}^{٥} - ٣\text{س}}}$

١٩	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{\text{٨ س}^2 - \text{٣ س} - ٥}}{\sqrt[6]{\text{س}^4 - ٥}}$	٢٠	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt{\text{س} + ٢} + \sqrt{\text{س} + ٥}}{\sqrt{\text{٢ س} + ٩}}$
٢١	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{س}\sqrt{\text{س}^4 - ٢} + \sqrt{\text{س}^2 + ٢}}{\text{س}^3 - ١}$	٢٢	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{٨ - \text{٢٧س}^6}}{\text{س} \quad \text{٤ س}^2 - ٧}$
٢٣	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{(\text{٢س}^3 + ١)^2 + \text{٦ س}^6}{(\text{٣ س}^3 - ١)^3 - \text{٧س}^6}$	٢٤	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\dfrac{\text{٢س}^2}{\text{س} + ١} - (\text{٢س} - ٣) \right)$
٢٥	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س}} - \sqrt{\text{س}^2 - \text{س}} \right)$	٢٦	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left[\sqrt{\text{س}^2 + ٢} - \sqrt{\text{س}^2 - ١} \right]$
٢٧	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{٣ س}} - \sqrt{\text{س}^2 - ١} \right)$	٢٨	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 - \text{س}} - \sqrt{\text{٤س}^2 + \text{س}} \right)$
٢٩	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 + \text{س} - ١} - \text{س} \right)$	٣٠	$\lim_{\text{س} \to \infty} \left(\sqrt{\text{س}^2 - \text{٣س} + ٤} - \text{س} \right)$
٣١	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{٣ س}^{-3} + \text{٢س}^{-1} + ١}{\text{س}^{-4} - \text{٥ س}^{-5} + ٢}$	٣٢	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\text{٥ س}^{-4} + \text{٣س}^{-2} - ٤}{\text{س}^{-5} - \text{٦ س}^{-3} - ٢}$
٣٣	أوجد قيمة ك إذا كان :ـ $\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{\text{ك س}^3 + \text{٣ س}}}{\sqrt{\text{٤ س}^2 + ٦}} = -١$	٣٤	$\lim_{\text{س} \to \infty} \dfrac{٣ \times ٥^{\text{س}} + ٢ \times ٧^{\text{س}}}{٩ \times ٧^{\text{س}} - ٦ \times ٤^{\text{س}}}$

٣٥) إذا كانت : $\text{د}(\text{س}) = \dfrac{\text{أس}^2 - ٣}{\text{س}^2 - \text{ب س} - ٥}$ وكانت $\lim_{\text{س} \to \infty} \text{د}(\text{س}) = ٤$ ، $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{د}(\text{س}) = ٣$ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

نهاية الدوال المثلثية

حقائق هامة :

كلاً من : حا س ، حتا س معرفة لجميع قيم س ∈ ح أما طا س معرفة لجميع قيم س ∈ ح ماعدا عند س = $\frac{2ن+1}{2}$ ط ، ن ∈ ص فمثلا : ظا$\frac{\pi}{2}$ غير معرف

(١) نهـــا حا س = حا أ ، أ ∈ ح (س ← أ)

(٢) نهـــا حتا س = حتا أ ، أ ∈ ح (س ← أ)

(٣) نهـــا طا س = طا أ ، أ ≠ $\frac{2ن+1}{2}$ π ، ن ∈ ص (س ← أ)

نظرية : نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا س}}{\text{س}}$ = ١ (حيث س مقاسة بالتقير الدائرى)

نتيجة (١) : نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{طا س}}{\text{س}}$ = ١ (حيث س مقاسة بالتقير الدائرى)

نتيجة (٢) : نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا أ س}}{\text{ب س}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (حيث س مقاسة بالتقير الدائرى)

نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{طا أ س}}{\text{ب س}}$ = $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ (حيث س مقاسة بالتقير الدائرى)

نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{س}}{\text{جا أ س}}$ = نهـــا (س ← ٠) $\frac{\frac{\text{س}}{\text{س}}}{\frac{\text{جا أ س}}{\text{س}}}$ = $\frac{1}{\text{أ}}$

نتيجة (٣) : نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا}^2\text{ س}}{\text{س}^2}$ = ١ ، نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا أ س}^2}{\text{س}^2}$ = أ

نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا}^2\text{ أ س}}{\text{س}^2}$ = نهـــا (س ← ٠) $\left(\frac{\text{حا أ س}}{\text{س}}\right)^2$ = أ^2

مثـال ١ : (أ) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٥ س}{س} = ٥$ (ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٢ س}{س} = ٢$

مثـال ٢ : (أ) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا ٥ س}{٤ س} = \frac{٥}{٤}$

(ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا \frac{٢}{٣} س}{٦ س} = \frac{٢}{٣} \div ٦ = ٤$

مثـال ٣ : (أ) $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣ س^٢}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \frac{حا ٣ س^٢}{س^٢} = ٣$

(ب) $\lim_{س \to ٠} \frac{ظا^٢ ٥ س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{ظا ٥ س}{س}\right)^٢ = ٢٥$

مثـال ٤ : $\lim_{س \to ٠} \frac{حا^٢ ٤ س}{س^٢} = \lim_{س \to ٠} \left(\frac{جا ٤س}{س}\right)^٢ = ٤^٢ = ١٦$

مثـال ٥ : $\lim_{س \to ٠} \frac{حا ٥ س}{٣ ظا ٤ س}$

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س ينتج

$= \frac{١}{٣} \lim_{س \to ٠} \frac{حا ٥ س}{س} \times \frac{س}{ظا ٤ س} = \frac{١}{٣} \times \frac{٥}{٤} = \frac{٥}{١٢}$

مثـال ٦ : $\lim_{س \to ٠} \frac{٧ س + حا ٣ س}{٣ س - ظا س}$

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على س ينتج

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\frac{٧س}{س} + \frac{جا٣س}{س}}{\frac{٣س}{س} + \frac{ظا س}{س}} = \frac{٧ + ٣}{٣ - ١} = ٥$

مثـــال ٧ : نهـــــا $\lim_{س \leftarrow ٠} \frac{٦ س^٢ + ٣ حا^٢ ٢ س}{٥ س^٢ - ظا ٣ س^٢}$

الحـــــل

بقسمة كل من البسط والمقام على $س^٢$

$$= \lim_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{٦س^٢}{س^٢} + ٣ \left(\frac{حا٢س}{س}\right)^٢}{\frac{٥س^٢}{س^٢} - \frac{ظا ٣س^٢}{س^٢}} = \frac{٦ + ٣ \times ٤}{٥ - ٣} = ٩$$

مثـــال ٨ : نهـــــا $\lim_{س \leftarrow ٣} \frac{حا (٥ س - ١٥)}{س - ٣}$

الحـــــل

$\because$ س $\leftarrow$ ٣ $\therefore$ (س - ٣) $\leftarrow$ ٠

$$= \lim_{س - ٣ \leftarrow ٠} \frac{حا ٥ (س - ٣)}{س - ٣} = ٥$$

مثـــال ٩ : نهـــــا $\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٣}} \frac{ظا (٩ س - ٣ \pi)}{٣ س - \pi}$

الحـــــل

$\because$ س $\leftarrow \frac{\pi}{٣}$ $\therefore$ س $- \frac{\pi}{٣} \leftarrow$ ٠ $\therefore$ ٣ س $- \pi \leftarrow$ ٠

$$= \lim_{٣س - \pi \leftarrow ٠} \frac{ظا ٣ (٣ س - \pi)}{(٣ س - \pi)} = ٣$$

مثـــال ١٠ : نهـــــا $\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}} \frac{جا (٢ س - \frac{١}{٢} \pi)}{ظا (٤ س - \pi)}$

الحـــــل

$\because$ س $\leftarrow \frac{\pi}{٤}$ $\therefore$ س $- \frac{\pi}{٤} \leftarrow$ ٠ $\therefore$ ٤ س $- \pi \leftarrow$ ٠

$$= \lim_{٤س - \pi \leftarrow ٠} \frac{جا \frac{١}{٢} (٤ س - \pi)}{٤ س - \pi} \times \frac{٤ س - \pi}{ظا (٤ س - \pi)} = \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$$

مثـــال ١١ : $\lim\limits_{٢س \to \pi} \dfrac{\text{جتا س}}{\text{ظا }(٢\text{س} - \pi)}$

الحــــــل

$\because ٢\text{س} \to \pi \qquad \therefore \text{س} \to \dfrac{\pi}{٢} \qquad \therefore \text{س} - \dfrac{\pi}{٢} \to ٠$

$$= \lim_{\text{س} - \frac{\pi}{٢} \to ٠} \frac{-\text{حا}(\text{س} - \frac{\pi}{٢})}{\text{ظا } ٢(\text{س} - \frac{\pi}{٢})} = \frac{١}{٢} \times \frac{-\text{حا}(\text{س} - \frac{\pi}{٢})}{(\text{س} - \frac{\pi}{٢})} \times \frac{(\text{س} - \frac{\pi}{٢})}{\text{ظا}(\text{س} - \frac{\pi}{٢})} = -\frac{١}{٢}$$

مثـــال ١٢ : $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \dfrac{١ - \text{جا س}}{(\text{س} - \frac{\pi}{٢})^٢}$

الحــــــل

بوضع $\text{ص} = \dfrac{\pi}{٢} - \text{س} \qquad \therefore \text{س} = \dfrac{\pi}{٢} - \text{ص}$

وعندما $\text{س} \to \dfrac{\pi}{٢} \qquad \therefore \text{ص} \to ٠$

$$= \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{٢}} \frac{١ - \text{جا س}}{(\text{س} - \frac{\pi}{٢})^٢} = \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{١ - \text{جا}(\frac{\pi}{٢} - \text{ص})}{(\text{ص})^٢}$$

$$= \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{١ - \text{جتا ص}}{(\text{ص})^٢}$$

وبوضع $\text{د}(\text{ص}) = \dfrac{١ - \text{جتا ص}}{(\text{ص})^٢} \times \dfrac{١ + \text{جتا ص}}{١ + \text{جتا ص}} = \dfrac{١ - \text{جتا}^٢\text{ص}}{\text{ص}^٢(١ + \text{جتا ص})}$

$$= \frac{\text{جا}^٢\text{ص}}{\text{ص}^٢(١ + \text{جتا ص})} = \left(\frac{\text{جا ص}}{\text{ص}}\right)^٢ \times \frac{١}{(١ + \text{جتا ص})}$$

$$\therefore \lim_{\text{ص} \to ٠} \text{د}(\text{ص}) = \lim_{\text{ص} \to ٠} \left(\frac{\text{جا ص}}{\text{ص}}\right)^٢ \times \lim_{\text{ص} \to ٠} \frac{١}{(١ + \text{جتا ص})}$$

$$= (١)^٢ \times \frac{١}{١ + ١} = \frac{١}{٢}$$

تمـــارين

أكمـــــل ما يأتى

(١) نهـــا (س ← ٠) جتا ٣ س = ...

(٢) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جا} \sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}}$ = ...

(٣) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{٤ + ٥ س}}{\text{جتا ٣س}}$ = ...

(٤) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جا}^{٢}\text{ ٦س}}{\text{٥س}^{٢}}$ = ...

(٥) نهـــا (س ← ٠) (٣ س قتا ٢س) = ...

إختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه

(١) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{٢س + جا ٣س}}{\text{ظا ٥س}}$ (أ) ٥   (ب) $\frac{٦}{٥}$ (جـ) ١   (د) صفر

(٢) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جتا٣س جا ٢س}}{\text{٦س}}$ (أ) ٣   (ب) ١   (جـ) ٠   (د) $\frac{١}{٣}$

(٣) نهـــا (هـ ← π) $\frac{\text{جا هـ}}{\pi \text{ – هـ}}$ (أ) $\pi^{٢}$ (ب) π   (جـ) – π   (د) ١

(٤) نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{١ ـ ظا س}}{\text{جا س ـ جتا س}}$ (أ) ١   (ب) ـ١   (جـ) ٠   (د) غير معرف

أوجد كلاً مما يأتى :

١	نهـا س ← ٠ (حا ٤ س) / (٥ س)	٢	نهـا س ← ٠ (٦ س) / (طا ٢ س)
٣	نهـا س ← ٠ (حا ٥ س²) / (٢ س²)	٤	نهـا س ← ٠ (٣ طا² ٢ س) / (٤ س²)
٥	نهـا س ← ٠ (حا ٦ س) / (طا ٥ س)	٦	نهـا س ← ٠ (حا² ٢ س) / (طا٣ س²)
٧	نهـا س ← ٢ (حا (٢ س – ٤)) / (س – ٢)	٨	نهـا س ← ٣ (طا (٢ س – ٦)) / (٣ س – ٩)
٩	نهـا س ← ٠ (حا ٢ س + طا ٣ س) / (٥ س)	١٠	نهـا س ← ٠ (حا ٣ س) / (٥ س حتا س)
١١	نهـا س ← ٠ (حا ٤ س – ٣ طا ٢ س) / (٥ س حتا ٥ س)	١٢	نهـا س ← ٠ (٦س – حا ٢ س) / (٨ س + حا٢س)
١٣	نهـا س ← ٠ (٥س + ٢ حا ٣ س) / (٤ س – طا٢ س)	١٤	نهـا س ← ٠ (٣س² + ٥ حا ٣ س²) / (س² + طا س²)
١٥	نهـا س ← ٠ (٤ حا² ٢س – ٣ س²) / (٦ س² + طا٥س²)	١٦	نهـا س ← ٠ (س² حتا٣س + طا² ٣س) / (٣س² – حا٢س)
١٧	نهـا س ← ٠ (حا² ٢س² + ٣ س²) / (٦ س⁴ حتا ٣س)	١٨	نهـا س ← ٠ (٣س حا² ٢س) / (٥ س³ – طا٣س³)

١٩	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٣س طا٢س}}{\text{٢ س}^{٢}\text{ حتا٢س}}$	٢٠	نهـــا (س ← ٠) س حا $\frac{١}{\text{س}}$
٢١	نهـــا (س ← ٠) [س (قتا س + ظتا س)]	٢٢	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا}^{٢}\text{ س}}{\text{س طا٢س}}$
٢٣	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{جا } \frac{١}{٢} \text{ س}}{\text{٢ س}}$	٢٤	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{٤ س حتا٢س}}{\text{(١ + ٢س) طا٤س}}$
٢٥	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا ٣س طا ٢ س}}{\text{٢ س}^{٢}\text{ حتا ٢ س}}$	٢٦	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{٢ س}^{٣}\text{ + حا٢ س}^{٣}}{\text{س}^{٤}\text{ − طا}^{٣}\text{ ٢ س}}$
٢٧	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{س حا س}}{\text{٣ س}^{٢}\text{ − طا}^{٢}\text{ س}}$	٢٨	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{١ − حتا}^{٢}\text{ ٣س}}{\text{٤س}^{٢}}$
٢٩	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{حا (٨ س − ٢ ط)}}{\text{طا (٤ س − ط)}}$	٣٠	نهـــا (س ← ٠) $\frac{\text{طا (٩ س − ٦ ط)}}{\text{جا (٣ س − ط)}}$

نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

نظرية :

الدالة د (س) تؤول للنهاية ل عندما س ← ء إذا و فقط إذا كانت نهايتها اليمنى و اليسرى عند ء موجودتين و كل منهما تساوى ل

أى أن : نهـــــا د (س) = ل إذا و فقط إذا كان : د ($ء^+$) = د ($ء^-$) = ل
س ← ٠

ملاحظات :

❖ إذا كان : د ($ء^+$) = د ($ء^-$) = ل فإن : نهـــــا د (س) = ل
س ← ٠

و بالعكس إذا كان : نهـــــا د (س) = ل فإن : د ($ء^+$) = د ($ء^-$) = ل
س ← ٠

❖ عند إيجاد نهاية دالة عندما س ← ء يراعى الآتى :

- إذا كانت قاعدة الدالة مختلفة على يمين و يسار ء مباشرة يجب بحث كل من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى للدالة ثم مقارنة النهايتين " إن وجدتا "

أما إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار ء مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالـــــة مباشرة دون بحث النهاية و النهاية اليسرى

➢ إذا كان : د ($ء^+$) ≠ د ($ء^-$) فإن : نهـــــا د (س) ليست موجودة
س ← ٠

➢ إذا كانت الدالة د معرفة على [ء ، ب [أو] ء ، ب] فلبحث نهاية الدالة عند ء نبحث النهاية اليمنى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ء و لبحث نهاية الدالة عند ب نبحث النهاية اليسرى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند ب

مثـــال١: إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} ٣س + ١ & \text{عندما } س < ١ \\ ٥ - س & \text{عندما } س > ١ \end{cases}$ أوجد كلاً من :

ⓐ نهـــا د (س) (س ← ٠)　　ⓑ نهـــا د (س) (س ← ٣)　　ⓒ نهـــا د (س) (س ← ١)

الحـــــل

(أ) ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٠ و هى : د (س) = ٣س + ١

∴ نهـــا د (س) (س ← ٠) = نهـــا (٣س + ١) = ٣ × ٠ + ١ = ١

(ب) ∵ الدالة لها نفس القاعدة على يمين و يسار س = ٣ و هى : د (س) = ٥ ـ س

∴ نهـــا د (س) (س ← ٣) = نهـــا (٥ ـ س) (س ← ٣) = ٥ ـ ٣ = ٢

(جـ) ∵ قاعدة الدالة على يسار ١ تختلف عن قاعدتها على يمين ١

∴ يجب بحث كلاً من النهاية اليمنى و النهاية اليسرى عند س = ١

∵ د ($^{-}$١) = نهـــا (س ← $^{-}$١) (٣س + ١) = ٣ × ١ + ١ = ٤

، د ($^{+}$١) = نهـــا (س ← $^{+}$١) (٥ ـ س) = ٥ ـ ١ = ٤

∵ د ($^{-}$١) = د ($^{+}$١) = ٤ ∴ نهـــا د (س) (س ← ١) = ٤

مثـــ٢ـــال: إذا كانت : د (س) = { $\frac{(س + ٣)^٢ - ٩}{س}$ عندما س < ٠ ، س + ٦ عندما س > ٠ }

أوجد نهـــا د (س) (س ← ٠)

الحـــــل

∵ د ($^{-}$٠) = نهـــا (س ← $^{-}$٠) د (س) = نهـــا (س ← $^{-}$٠) $\frac{(س + ٣)^٢ - ٩}{س}$

= نهـــا (س ← $^{-}$٠) $\frac{(س + ٣ - ٣)(س + ٣ + ٣)}{س}$ = ٦

، د ($^{+}$٠) = نهـــا (س ← $^{+}$٠) د (س) = نهـــا (س ← $^{+}$٠) (س + ٦) = ٠ + ٦ = ٦

∵ د ($^{-}$٠) = د ($^{+}$٠) = ٦ ∴ نهـــا د (س) (س ← ٠) = ٦

مثــ٣ـال: إذا كانت : د (س) = { $\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{س}}$ عندما س < ٠ ، حتا ٣ س عندما س > ٠ } أوجد نهـــا د (س) س ← ٠

الحــــــل

∵ د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) $\frac{\text{حا ٣ س}}{\text{س}}$ = ٣

، د (٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) حتا ٣ س = ١

∵ د (٠⁺) ≠ د (٠⁻) ∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) ليس لها وجود

مثــ٤ـال: إذا كانت : د (س) = { $\frac{\text{ا س}^2 + \text{٢ س} - \text{٥}}{\text{س} - \text{١}}$ عندما س < ١ ، ٣ س + ٥ عندما س > ١ }

لها نهاية عند س = ١ أوجد قيمة كل من ا

الحــــــل

∵ د (س) لها نهاية عند س = ١ ∴ د (١⁻) = د (١⁺)

∴ نهـــا (س ← ١⁻) $\frac{\text{(ا س + ٥)(س} - \text{١)}}{\text{س} - \text{١}}$ = نهـــا (ا س + ٥)

∴ ا + ٥ = ٨ ومنها : ا = ٣

مثــ٥ـال: د (س) = { س | س | ـ ١ عندما س < ١ ، $\frac{\text{س}}{|\text{س}|}$ ـ ٢ عندما س > ١ } أوجد نهـــا د (س)

الحــــــل

∵ د(س) = { س × ـ س ـ ١ = ـ س٢ ـ ١ عندما س < ١ ، $\frac{\text{س}}{\text{س}}$ ـ ٢ = ١ ـ ٢ = ـ ١ عندما س > ١ }

د (٠⁻) = نهـــا (س ← ٠⁻) (ـ س ـ ١) = ـ ١ ، د (٠⁺) = نهـــا (س ← ٠⁺) ـ ١ = ـ ١

∵ د (٠⁺) = د (٠⁻) = ـ ١ ∴ نهـــا (س ← ٠) د (س) = ـ ١

نهاية الدالة المعرفة على فترة عند أحد طرفيها

تعريف :

إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة المفتوحة] ٢ ، ب [أو المغلقة [٢ ، ب]

(١) الدالة ليست معرفة على يسار النقطة ٢ فإننا نبحث النهاية اليمنة فقط د (٢^+)

و تكون فى هذه الحالة نهـــا (س ← ٢^+) د (س) ، نهـــا (س ← ٢) د (س) غير متواجتان

(٢) الدالة ليست معرفة على يمين النقطة ب فإننا نبحث النهاية اليمنة فقط د ($ب^-$)

و تكون فى هذه الحالة نهـــا (س ← $ب^-$) د (س) ، نهـــا (س ← ب) د (س) غير متواجتان

أى أن :

نهـــاية الدالة عند النقطة الطرفية غير موجودة ويكون للدالة عند هذه النقطة نهـــاية من جهة واحدة فقط [يمنى أ، يسرى]

مثـــ١ـــال : أبحث وجود نـهاية للدالة د : د (س) = $\sqrt{س - ٥}$ عند : س ← ٥

الحـــــل

د (س) معرفة على [٥ ، ∞ [

∴ الدالة د معرفة فقط على يمين س = ٥

، نهـــا (س ← ٥^+) د (س) = نهـــا (س ← ٥^+) $\sqrt{س - ٥}$ = صفر

∴ نهـــا (س ← ٥^-) د (س) غير موجودة ، نهـــا (س ← ٥) د (س) غير موجودة

[لأن الدالة غير معرفة على يسار ٥]

مثـــ٢ـــال : إذا كانت الدالة د : د (س) = $\begin{cases} \frac{\text{ظا ٤ س}}{\text{قتا ٩ س}} & ، -\frac{\pi}{٩} < س < ٠ \\ \frac{١}{٩}(٢^٢ + ٢) & ، س > ٠ \end{cases}$

لها نهاية عند س = ٠ أوجد قيمة ٢ :

الحـــــل

د (٠^-) = نهـــا (س ← ٠^-) $\frac{\text{ظا ٤ س}}{\text{جا ٩ س}}$ = $\frac{٤}{٩}$ ، د (٠^+) = $\frac{١}{٩}$ ($٢^٢$ + ٢)

∵ الدالة لها نهاية عند س = ٠ ∴ د (٠^-) = د (٠^+)

، $\frac{١}{٩}$ ($٢^٢$ + ٢) = $\frac{٤}{٩}$ ∴ $٢^٢$ + ٢ = ٤ ⇐ $٢^٢$ = ٢ ∴ ٢ = ± $\sqrt{٢}$

تمـــــارين

(١) إذا كانت : د (س) = { س^٢ +٥ + ٦ عندما س > ٠ ؛ ٦ – س عندما س < ٠ } أوجد كلاً من :

ⓐ نهـا س ← ١ د (س)   ⓑ نهـا س ← –١ د (س)   ⓒ نهـا س ← ٠ د (س)

(٢) إذا كانت : د (س) = س | س – ١ | + ٣ أوجد كلاً من :

ⓐ نهـا س ← –١ د (س)   ⓑ نهـا س ← ١ د (س)   ⓒ نهـا س ← ٣ د (س)

(٣) إذا كانت : د (س) = { س^٢ + ٣ س ، –٢ > س > ٠ ؛ س – ١ ، ٠ > س > ٣ } أوجد كلاً من :

ⓐ نهـا س ← –٢ د (س)   ⓑ نهـا س ← ٣ د (س)   ⓒ نهـا س ← ٠ د (س)

(٤) إذا كانت : د (س) = { (س^٢ + ١) / (س + ١) ، –١ > س > ٠ ؛ (س حتا س) / (٥ س – ٤ حا س) ، ٠ > س > $\frac{\pi}{٢}$ } أوجد كلاً من :

ⓐ نهـا س ← –١ د (س)   ⓑ د (س)   ⓒ نهـا س ← $\frac{\pi}{٢}$ د (س)

(٥) إذا كانت : د (س) = { حا (س – ١) / (س – ١) ، س < ١ ؛ طا $\frac{\pi \text{ س}}{٤}$ ، س > ١ } أوجد نهـا س ← ١ د (س)

(٦) إذا كان: للدالة د (س) = { أ س^٢ – ب ، س < ٢ ؛ أ س + ب ، س > ٢ } لها نهاية تساوى ٣

عندما س ← ٢ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

(٧) إذا كان: للدالة د (س) = { ٣ س – ٢ ، س > –١ ؛ أ س + ب ، –١ > س > ٣ ؛ ٦ – س ، س < ٣ }

لها نهاية عند كل من : س = –١ ، س = ٣ أوجد قيمة كل من : أ ، ب

إتصال دالة عند نقطة

تعريف :

إذا كانت الدالة د معرفة على فترة ما و كانت ٫ تنتمى لهذه الفترة فإن :

د تكون متصلة عند ٫ إذا و فقط إذا كانت نهـــا (س ← ٫) د (س) = د (٫)

شروط إتصال دالة عند نقطة :

تكون الدالة د متصلة عند س = ٫ إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية مجتمعة :

١ ـ الدالة معرفة عند س = ٫ أى أن : د (٫) لها وجود

٢ ـ نهـــا (س ← ٫) د (س) لها وجود

٣ ـ نهـــا (س ← ٫) د (س) = د (٫)

ملاحظة :

يكفى عدم تحقق شرط واحد من الشروط الثلاثة السابقة لعدم إتصال الدالة د عند النقطة س = ٫ فمثلاً إذا كانت الدالة غير معرفة عند س = ٫ فهى بالتالى غير متصلة عند س = ٫ و لا داعى أن نبحث عن تحقق الشرطين الآخرين

مثـــ١ـــال : ابحث إتصال الدالة : د (س) = | س ـ ١ | + ٣ عند س = ١

الحـــــــل

د (س) = { س ـ ١ + ٣ ، س ≥ ١ ؛ ـس + ١ + ٣ ، س < ١ } = { س + ٢ ، س ≥ ١ ؛ ٤ ـ س ، س < ١ }

∵ د (س) معرفة عند س = ١ حيث : د (١) = ١ + ٢ = ٣

، د ($^-$١) = نهـــا (س ← $^-$١) (٤ ـ س) = ٣

، د ($^+$١) = نهـــا (س ← $^+$١) (س + ٢) = ٣

أى أن : نهـــا (س ← ١) د (س) = ٣

∴ د (١) = نهـــا (س ← ١) د (س) ∴ د متصلة عند س = ١

ملاحظة :

إذا كانت د (س) معرفة عند س = ﻫ ، $\lim_{س \leftarrow ﻫ}$ د (س) لها وجود ، كانت الدالة غير متصلة

عند س = ﻫ لإختلاف د (ﻫ) عن $\lim_{س \leftarrow ﻫ}$ د (س) فيمكن جعل الدالة متصلة عند س = ﻫ بإعادة تعريفها بجعل د (ﻫ) = $\lim_{س \leftarrow ﻫ}$ د (س)

مثـــ٢ـــال : إذا كانت : د (س) = $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{س + ٩} - ٣}{س} & ، س \neq ٠ \\ ﻫ & ، س = ٠ \end{cases}$

أوجد قيمة ﻫ التى تجعل د متصلة عند س = ٠

الحـــــــل

∵ د (س) متصلة عند س = ٠ ∴ د (٠) = $\lim_{س \leftarrow ٠}$ د (س)

∴ ﻫ = $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{(\sqrt{س + ٩} - ٣)}{س}$ = $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{(\sqrt{س + ٩} - ٣)}{س} \times \dfrac{(\sqrt{س + ٩} + ٣)}{(\sqrt{س + ٩} + ٣)}$

= $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س}{س(\sqrt{س + ٩} + ٣)}$ = $\dfrac{١}{٦}$

مثـــ٣ـــال: إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ٣ ، س = –١ أوجد قيمة كل من : ﻫ ، ب حيث : د (س) = $\begin{cases} ٣ س + ١ & ، س \leqslant -١ \\ ﻫ س + ب & ، -١ < س < ٣ \\ س^٢ - ٣ & ، س \geqslant ٣ \end{cases}$

الحـــــــل

∵ د (س) متصلة عند س = ٣ ∴ د (٣) = $\lim_{س \leftarrow ٣}$ د (س)

∴ د (٣) = د (٣^-) = د (٣^+) ∴ $(٣)^٢$ – ٣ = ٣ ﻫ + ب = ٣ - - (١)

∵ د (س) متصلة عند س = –١ ∴ د (–١) = $\lim_{س \leftarrow -١}$ د (س)

∴ د (–١) = د (–١^-) = د (–١^+) ∴ –٣ + ١ = – ﻫ + ب = –٢ - - (٢)

من (١) ، (٢)

تمـــــارين

١ ـ أبحث إتصال الدوال الآتية عند النقط المبينة :

(١) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٢س - ٨}{س^{٢} - ١٦} & ، س < ٤ \\ \frac{٣}{٤} & ، س \geqslant ٤ \end{cases}$ عند س = ٤

(٢) $د(س) = \begin{cases} س^{٢} - ١ & ، س \leqslant ٢ \\ ٣ & ، ٢ < س < ٥ \\ س - ٢ & ، س \geqslant ٥ \end{cases}$ عند س = ٢ ، س = ٥

(٣) $د(س) = \begin{cases} \frac{|س - ٣|}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢ & ، س = ٣ \end{cases}$ عند س = ٣

(٤) $د(س) = \begin{cases} حا\,س + حتا\,س & ، س \leqslant \frac{\pi}{٢} \\ ٢ + حتا\,٢س & ، س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$ عند س = ٣

٢ ـ أوجد قيمة الثابت ᵖ التى تجعل د متصلة عند النقط المبينة

(١) $د(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - (ᵖ + ١)س + ᵖ}{س - ١} & ، س \neq ١ \\ ٣س - ١ & ، س = ١ \end{cases}$ عند س = ١

(٢) $د(س) = \begin{cases} \frac{حا^{٢}\,٢س}{س\,ظا\,٣س} & ، س \neq ٠ \\ ᵖ + ١ & ، س = ٠ \end{cases}$ عند س = ٠

٣ ـ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ـ ٢ ، س = ٥ أوجد

قيمة كل من : ᵖ ، ب حيث : $د(س) = \begin{cases} ٣س - ٢ & ، س \leqslant -٢ \\ ᵖس + ب & ، -٢ < س < ٥ \\ س^{٢} - ١٢ & ، س \geqslant ٥ \end{cases}$

٤ ـ إذا كانت الدالة د متصلة عند س = ١ ، س = ٢ أوجد

قيمة كل من : ᵖ، ب حيث : $د(س) = \begin{cases} س - ٢ & ، س \leqslant ١ \\ ᵖس + ب & ، ١ < س < ٢ \\ ٦س + ٢ & ، س \geqslant ٢ \end{cases}$

إتصال دالة على فترة

تعريف :

(١) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف = [ؗ ، ب] فإن : الدالة د (س)
تكون متصلة على ف إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة

(٢) إذا كانت الدالة د معرفة على الفترة ف =] ؗ ، ب [فإن : الدالة د (س)
تكون متصلة على ف إذا تحققت الشروط الآتية :

ؗ – الدالة د متصلة على الفترة ف =] ؗ ، ب [

ب – الدالة د متصلة من اليمين عند ؗ أى : د ($ؗ^+$) = نهـــا (س ← ؗ) د (س)

حـ – الدالة د متصلة من اليمين عند ؗ أى : د ($ؗ^-$) = نهـــا (س ← ؗ) د (س)

ملاحظة :

الدالة د غير متصلة على الفترة ف =] ؗ ، ب [إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل
مثل حـ ∋ ف بحيث تكون د غير متصلة عندها أى إذا لم تتحقق إحدى الشروط :

ؗ – الدالة د غير معرفة عند حـ

ب – عدم وجود نهاية للدالة د عند حـ

حـ – إختلاف نهاية الدالة د عند حـ عن د (حـ)

بعض أنماط الدوال المتصلة :

(١) دوال كثيرات الحدود : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

(٢) الدوال الكسرية الجبرية : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح
ما عدا عند أصفار دالة المقام

(٣) الدوال المثلثية :

* دالة الجيب : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة جيب التمام : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

* دالة الظل : متصلة على ح أو أى فترة جزئية من ح

ما عدا عند النقط $\frac{٢ن + ١}{٢}$ ط حيث ن ∋ ص

نظرية :

إذا كانت د$_1$ ، د$_2$ دالتين معرفتين على ف = [أ ، ب] و كانتا متصلتين على الفترة ف فإن كلاً من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة ف :

(١) د$_1$ ± د$_2$ (٢) د$_1$. د$_2$ (٣) $\frac{د_1}{د_2}$ بشرط د$_2$ ≠ ٠

مثــ١ــال : أبحث إتصال الدالة د حيث د (س) = { ٣س + ١ ، – ٣ ≤ س < ٢ ؛ س^2 + ٣ ، ٢ ≤ س ≤ ٥

الحــــــــل

د (س) معرفة على [– ٣ ، ٥]

(١) د (س) = ٣س + ١ لكل س ∈] – ٣ ، ٢ [

∵ د (س) كثرة حدود ∴ د (س) متصلة على] – ٣ ، ٢ [

(٢) د (س) = س^2 + ٣ لكل س ∈] ٢ ، ٥ [

∵ د (س) كثرة حدود ∴ د (س) متصلة على] ٢ ، ٥ [

(٣) د (٢) = ٤ + ٣ = ٧

، نهـــا$_{س \leftarrow ٢^-}$ (٣س + ١) = ٧ ، نهـــا$_{س \leftarrow ٢^+}$ (س^2 + ٣) = ٧

∴ نهـــا$_{س \leftarrow ٢}$ د (س) = د (٢) ∴ د (س) متصلة عند س = ٢

(٤) د (– ٣) = – ٨ ، نهـــا$_{س \leftarrow -٣^+}$ (٣س + ١) = – ٨

∴ د (س) متصلة من اليمين عند س = – ٣

، د (٥) = ٢٨ ، نهـــا$_{س \leftarrow ٥^-}$ (س^2 + ٣) = ٢٨

∴ د (س) متصلة من اليسار عند س = ٥

من (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) نستنتج أن د (س) متصلة على [– ٣ ، ٥]

مثـــ٢ـــال : إذا كانت الدالة د متصلة على ح أوجد قيمة كل من : ﺃ ، ب حيث : د (س) = { ٣ س – ٢ ، س ≤ –٢ ؛ ﺃ س + ب ، –٢ < س < ٥ ؛ س^{٢} – ١٢ ، س ≥ ٥ }

الحـــــــل

∵ د متصلة على ح ∴ د متصلة على س = –٢

∴ د (–٢) = د (–٢$^{-}$) = د (–٢$^{+}$)

، نهـــــــا (س ← –٢$^{+}$) (ﺃ س + ب) = ٣×–٢ –٢ ∴ –٢ ﺃ + ب = –٨ --- (١)

الدالة متصلة عند س = ٥

∴ نهـــــــا (س ← ٥$^{-}$) (ﺃ س + ب) = (٥)^{٢} –١٢ ∴ ٥ ﺃ + ب = ١٣ --- (٢)

من (١) ، (٢) ∴ ﺃ = ٣ ، ب = –٢

تمـــــــارين

(١) أبحث إتصال كل من الدوال الآتية على ح :

١ – د (س) = { س + ٢ ، س ≤ ١ ؛ ٥ – ٤ س ، س > ١ }

٢ – د (س) = { س^{٢} – ١ ، –٢ ≤ س ≤ ١ ؛ ٢ س + ١ ، ١ < س < ٣ ؛ ٣ س – ٢ ، ٣ ≤ س < ٦ }

٣ – د (س) = { ١ + حتا ٢ س ، ٠ ≤ س ≤ $\frac{\pi}{2}$ ؛ ١ – حا س ، $\frac{\pi}{2}$ < س < π }

٤ – د (س) = { س + ٢ ، س ≤ ٠ ؛ $\frac{\text{س + ظا ٣ س}}{\text{٣س – حا س}}$ ، س > ٠ }

(٢) أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة على ح حيث :

$$د(س) = \begin{cases} \dfrac{س - ٣٢}{س^٢ - ٤} &، \quad س \leqslant ٢ \\ ك س^٢ - ٤ &، \quad س > ٢ \end{cases}$$

(٣) إذا كانت الدالة

$$د(س) = \begin{cases} ٢س^٢ - ١ &، \quad س \leqslant ١ \\ أ س + ب &، \quad ١ < س < ٣ \\ \dfrac{٢س^٢ - س - ١}{س^٢ - ٢س + ٤} &، \quad س \geqslant ٣ \end{cases}$$

متصلة على ح أوجد قيمة كل من : أ ، ب

(٤) أوجد قيمة ك التى تجعل الدالة د متصلة على ح حيث :

$$د(س) = \begin{cases} ٣س + ك &، \quad س \leqslant ٢ \\ ١ - ك س^٢ &، \quad س > ٢ \end{cases}$$



منتدى توجيه الرياضيات
أ/ عادل إدوار

القسم العلمي

الفصل الدراسي الأول

- قانون الجيب
- قانون جيب التمام
- حل المثلث

(١) إذا علم قياسا زاويتين وطول ضلع

(٢) إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة

(٣) إذا علم أطوال أضلاعه الثلاثة

(٤) طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لإحداهما (الحالة المبهمة)

مراجعة ما سبق دراسته

إشارات الدوال المثلثية

كما هو مبين في الشكل و يجب قبل تحديد إشارة الدالة المثلثية تحديد الربع الذى تقع فيه الزاوية

الربع	الزاوية هـ	إشارة جا ، قتا	إشارة جتا ، قا	إشارة ظا ، ظتا
الربع الأول	] ٠ ، ٩٠° [	+	+	+
الربع الثانى	] ٩٠° ، ١٨٠° [	+	–	–
الربع الثالث	] ١٨٠° ، ٢٧٠° [	–	–	+
الربع الرابع	] ٢٧٠° ، ٣٦٠° [	–	+	–

الربع الأول: كل الدوال موجبة (+ ، +)
الربع الثانى: حا ، قا فقط موجبة (– ، +)
الربع الثالث: ظا ، ظتا فقط موجبة (– ، –)
الربع الرابع: جتا ، قا فقط موجبة (+ ، –)
ص ٩٠° ، س ٠° ، س- ١٨٠° ، ٣٦٠° ، ص- ٢٧٠° $\frac{3}{2}$ ط

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

الدالة	٣٠°	٤٥°	٦٠°	٩٠°	١٨٠°	٢٧٠°	٣٦٠° ، صفر°
حا	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	١	صفر	– ١	صفر
حتا	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	صفر	– ١	صفر	١
ظا	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	١	$\sqrt{3}$	غير معرف	صفر	غير معرف	صفر

بعض خواص الدوال المثلثية :-

[١] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتتامتين [هـ ، ٩٠° - هـ]

(١) حا هـ = حتا (٩٠° – هـ) ،،،، قتاهـ = قا(٩٠° – هـ)

(٢) حتا هـ = حا(٩٠° – هـ) ،،،، قا هـ = قتا (٩٠° – هـ)

(٣) ظا هـ = ظتا(٩٠° – هـ) ،،،، ظتا هـ = ظا (٩٠° – هـ)

ملاحظة : إذا كان حا س = حتا ص

∴ س + ص = ٩٠° حيث س ، ص قياسا زاويتين حادتين موجبتين

[٢]العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين المتكاملتين [هـ ، ١٨٠° - هـ]

الزاوية (١٨٠° ــ هـ) تقع فى الربع الثانى (جا ، قتا) فقط موجبة

(١) حا (١٨٠° ــ هـ) = حا هـ

(٢) حتا (١٨٠° ــ هـ) = ــ حتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° ــ هـ) = ــ ظا هـ

[٣] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين[هـ ، ١٨٠° + هـ]

الزاوية (١٨٠ + هـ) تقع فى الربع الثالث (ظا ، ظتا) فقط موجبة

(١) حا (١٨٠° + هـ) = ــ حا هـ

(٢) حتا (١٨٠° + هـ) = ــ حتا هـ

(٣) ظا (١٨٠° + هـ) = ظا هـ

[٤] العلاقة بين النسب المثلثية للزاويتين [هـ ، ٣٦٠° - هـ] أ، [هـ ، ــ هـ]

الزاوية (٣٦٠° ــ هـ) تقع فى الربع الرابع (جتا ، قا) فقط موجبة

(١)حا (٣٦٠° ــ هـ)= ــ حا هـ

(٢) حتا (٣٦٠° ــ هـ) = حتا هـ

(٣) ظا (٣٦٠° ــ هـ) = ــ ظا هـ

فمثلاً (١) جا ١٢٠° فى الربع الثانى = جا (١٨٠ ــ ٦٠) = جا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

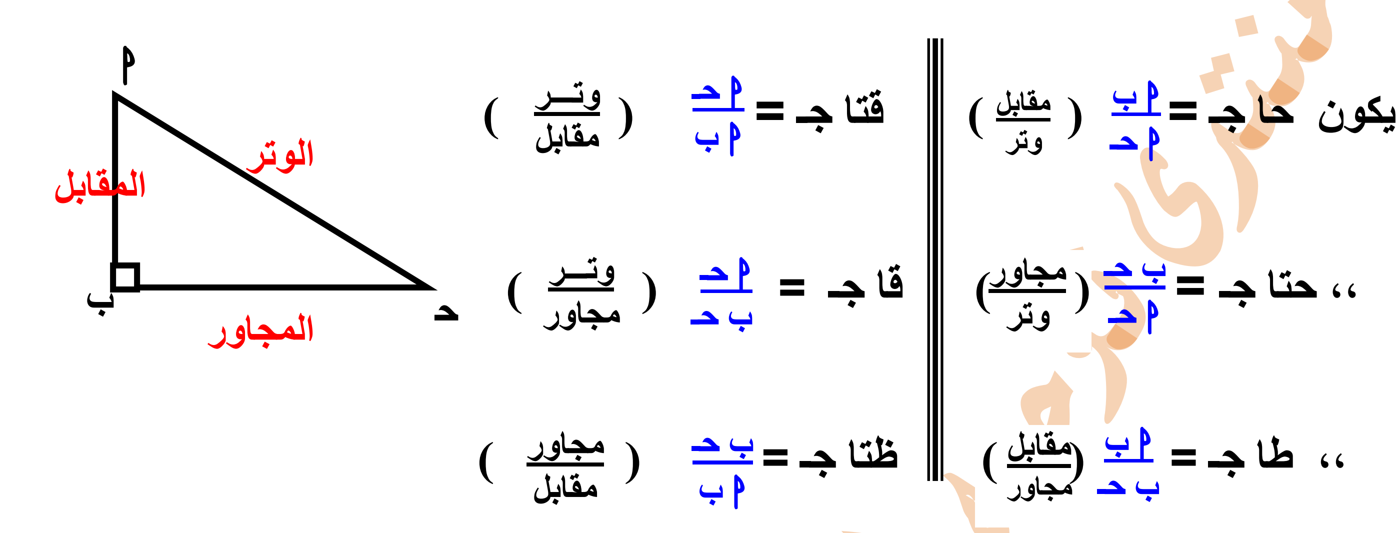
(٢) جتا ٢١٠° فى الربع الثالث = جتا (١٨٠ + ٣٠) = ــ جتا ٣٠° = ــ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٣) ظا ١٥٠° فى الربع الثانى = ظا (١٨٠ ــ ٣٠) = ــ ظا ٣٠° = ــ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٤) قا ٣٠٠° فى الربع الرابع = قا (٣٦٠ ــ ٦٠) = قا ٦٠° = ٢

(٥) قتا (ــ ٦٠°) فى الربع الرابع = ــ قتا ٦٠° = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$

الدوال المثلثية للزوايا الحادة المرسومة فى Δ م ب جـ قائم فى ب



يكون حا جـ = $\frac{\text{م ب}}{\text{م جـ}}$ ($\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$) ، قتا جـ = $\frac{\text{م جـ}}{\text{م ب}}$ ($\frac{\text{وتر}}{\text{مقابل}}$)

،، حتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{م جـ}}$ ($\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$) ، قا جـ = $\frac{\text{م جـ}}{\text{ب جـ}}$ ($\frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}$)

،، طا جـ = $\frac{\text{م ب}}{\text{ب جـ}}$ ($\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$) ، ظتا جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{م ب}}$ ($\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}$)

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

***العلاقات الأساسية بين الدوال المثلثية :**

(١) حتا٢هـ + حا٢هـ = ١ ، ١ + طا٢هـ = قا٢هـ ، ١ + ظتا٢هـ = قتا٢هـ

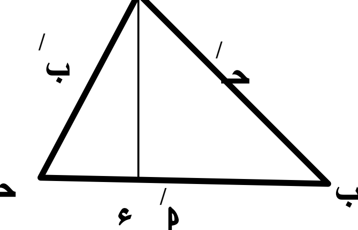
(٢) حا هـ قتا هـ = ١ ، حتا هـ قا هـ = ١ ، طا هـ ظتا هـ = ١

(٣) طا هـ = $\frac{\text{حا هـ}}{\text{حتا هـ}}$ ، ظتا هـ = $\frac{\text{حتا هـ}}{\text{حا هـ}}$

قانون الجيب (قاعدة الجيب)

في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث مع جيوب الزوايا المقابلة لها

أى أنه : في أي مثلث أ ب جـ يكون :



$$\frac{أ'}{جا\ أ} = \frac{ب'}{جا\ ب} = \frac{جـ'}{جا\ حـ}$$

حيث الرموز : أ ، ب ، حـ تعبر عن قياسات زوايا المثلث أ ب حـ

، أ/ ، ب/ ، حـ/ تعبر عن أطوال الأضلاع ب حـ ، أ حـ ، أ ب على الترتيب

البرهان :

مساحة △ أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ب حـ × أ ء ،

∵ أ ء = حـ/ جا ب (من مساحة △أ ب ء)

∴ مساحة △أ ب حـ = $\frac{1}{2}$ × ب/ جـ/ حا أ = $\frac{1}{2}$ × أ/ جـ/ حاب = $\frac{1}{2}$ × أ/ ب/ حا جـ

بالضرب × ٢ ثم القسمة على أ/ ب/ جـ/ ينتج المطلوب

$$\frac{أ'}{جا\ أ} = \frac{ب'}{جا\ ب} = \frac{جـ'}{جا\ حـ}$$

ملاحظات :

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه = أ/ + ب/ + جـ/

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جيب الزاوية المحصورة بينهما

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ × أ/ ب/ جا جـ = $\frac{1}{2}$ × ب/ جـ/ جا أ = $\frac{1}{2}$ × أ/ جـ/ جاب

محيط الدائرة = ٢ ط نق & مساحة الدائرة = ط نق^{٢}

أكبر ضلع في المثلث يقابل أكبر زاوية في المثلث

أصغر ضلع في المثلث يقابل أصغر زاوية في المثلث

مثـال ١ : في المثلث ﻡ ب جـ إذا كان ﻡ/ = ١٠ سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°

فأوجد قيمة كل من ب/ ، جـ/ ومساحة المثلث ﻡ ب جـ لأقرب رقم عشري

الحـــل

∵ ق(∠ﻡ) = ١٨٠° − (٤٥ + ٦٠) = ٧٥°

∴ $\frac{ﻡ/}{جا ﻡ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{١٠}{جا ٧٥} = \frac{ب/}{جا ٤٥} = \frac{جـ/}{جا ٦٠}$

∴ ب/ = $\frac{١٠ \times جا ٤٥}{جا ٧٥}$ = ٧,٤ سم

، جـ/ = $\frac{١٠ \times جا ٦٠}{جا ٧٥}$ = ٩ سم

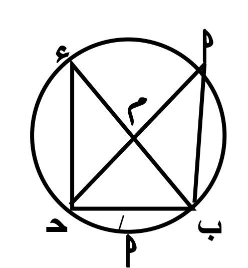
، مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ﻡ/ × ب/ جا جـ = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧,٤ × جا ٦٠° = ٣٢ سم^{٢}

تمرين مشهور

في أي مثلث ﻡ ب جـ يكون :



∴ $\frac{ﻡ/}{جا ﻡ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ = ٢ نق



حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ﻡ ب جـ

البرهان :

نرسم الدائرة م المارة برؤوس Δ ﻡ ب جـ

ثم نرسم القطر ب ء ، الوتر جـ ء

فيكون : ق(∠ب جـ ء) = ٩٠° " محيطية مرسومة فى نصف دائرة "

، ق(∠ﻡ) = ق(∠ء) " محيطيتان تحصران نفس القوس "

فى Δ ء ب جـ : جا ء = $\frac{ﻡ/}{ب ء} = \frac{ﻡ/}{٢ نق}$ ∴ جا ﻡ = $\frac{ﻡ/}{٢ نق}$

∴ $\frac{ﻡ/}{جا ﻡ}$ = ٢ نق ∴ $\frac{ﻡ/}{جا ﻡ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ = ٢ نق

نتائج هامة

ﻡ/ = ٢ نق جا ﻡ & ب/ = ٢ نق جا ب & جـ/ = ٢ نق جا جـ

جا ا = $\frac{ﻡ/}{٢ نق}$ & جا ب = $\frac{ب/}{٢ نق}$ & جا جـ = $\frac{جـ/}{٢ نق}$

ملاحظة هامة : تستخدم كل من قاعدة الجيب والتمرين المشهور إذا علم :

- قياسا زاويتين وطول ضلع
- قياسا زاويتين وطول نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث
- قياسا زاويتين وطول محيط المثلث

مثـــ٢ ـال: في المثلث ﻫ ب جـ إذا كان ﻫ / = ١٠ سم ، ق(∠ب) = ٤٥° ، ق(∠جـ) = ٦٠°

فأوجد محيط الدائرة الخارجة للمثلث ﻫ ب جـ

الحـــــــــــــــل

∵ ق(∠ﻫ) = ١٨٠ − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥°

∴ $\frac{\text{ﻫ}/}{\text{جا ﻫ}} = \frac{\text{ب}/}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا جـ}}$ = ٢ نق

∴ $\frac{١٠}{\text{جا ٧٥}} = \frac{\text{ب}/}{\text{جا ٤٥}} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا ٦٠}}$ = ٢ نق

∴ ٢ نق = $\frac{١٠}{\text{جا ٧٥}}$ = ١٠,٣ سم ∴ نق = ٥,٢ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ ط نق = ٢ × ط × ٥,٢ = ٣٢,٥ سم

مثـ٣ـــال: إذا كان مقاييس زوايا مثلث تتناسب مع ١ : ٢ : ٣ فأثبت أن أطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تتناسب مع ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

الحـــــــــــــــل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق(∠ﻫ) = ١٨٠ × $\frac{١}{٦}$ = ٣٠°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠ × $\frac{٢}{٦}$ = ٦٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠ × $\frac{٣}{٦}$ = ٩٠°

∵ $\frac{\text{ﻫ}/}{\text{جا ﻫ}} = \frac{\text{ب}/}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا جـ}}$

∴ ﻫ/ : ب/ : جـ/ = جا ﻫ : جا ب : جا جـ = جا ٣٠° : جا ٦٠° : جا ٩٠°

= $\frac{١}{٢}$: $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$: ١ = ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

مثـــ٤ ـــال: ل م ن مثلث فيه كان ، ق(∠ل) = ٥٢ َ ٣٨ ْ ، ق(∠ن) = ١٧ َ ٤٤ ْ

م َ = ٣٥٢,٧ فأوجد م ن ،، ل م

الحـــــــــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠ ْ − (٥٢ َ ٣٨ ْ + ١٧ َ ٤٤ ْ) = ٥١ َ ٩٦ ْ

∴ م َ / جا م = ل َ / جا ل = ن َ / جا ن

∴ ٣٥٢,٧ / جا ٥١ َ ٩٦ ْ = ل َ / جا ٥٢ َ ٣٨ ْ = ن َ / جا ١٧ َ ٤٤ ْ

∴ م ن = ل َ = (٣٥٢,٧ × جا ٥٢ َ ٣٨ ْ) / جا ٥١ َ ٩٦ ْ = ٢٢٢,٩

∴ ل م = ن َ = (٣٥٢,٧ × جا ١٧ َ ٤٤ ْ) / جا ٥١ َ ٩٦ ْ = ٢٤٨

مثـــ٥ ـــال: إذا رمزنا لمساحة سطح المثلث أ ب جـ بالرمز Δ فأثبت أن

Δ = أ َ ب َ جـ َ / ٤ نق = ٢ نق ٢ جا أ جا ب جا جـ حيث : نق طول نصف قطر الدائرة

الحـــــــــــــل

∵ Δ = ١/٢ ب َ جـ َ جا أ ∵ أ َ / جا أ = ٢ نق ∴ جا أ = أ َ / ٢ نق

∴ Δ = ١/٢ ب َ جـ َ أ َ / ٢ نق = أ َ ب َ جـ َ / ٤ نق [١]

∵ ب َ / جا ب = جـ َ / جا جـ = ٢ نق ∴ ب َ = ٢ نق جا ب ، جـ َ = ٢ نق جا جـ

∴ Δ = ١/٢ × ٢ نق جا ب × ٢ نق جا جـ × جا أ = ٢ نق ٢ جا ب جا جـ جا أ

مثـ٦ ـال: أ ب جـ مثلث فيه جا أ : جا ب : جا جـ = ٩ : ٢ : ٤

أوجد أطوال أضلاعه إذا علم أن محيطه = ٤٥ سم

الحـــــــــــــل

∵ أ َ / جا أ = ب َ / جا ب = جـ َ / جا جـ = م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = م$ ∴ أ' = ٩ م ، ب' = ٢ م ، جـ' = ٤ م

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{أ' + ب' + جـ'}{٩ + ٢ + ٤} = م$ ، حيث $\frac{\text{مجموع المقدمات}}{\text{مجموع التوالى}}$ = أحدى النسب

∴ $\frac{أ'}{٩} = \frac{ب'}{٢} = \frac{جـ'}{٤} = \frac{٤٥}{١٥} = ٣$

∴ أ' = ٩ × ٣ = ٢٧ سم

ب' = ٢ × ٣ = ٦ سم

جـ' = ٤ × ٣ = ١٢ سم

تمــــــــارين

١ – ل م ن مثلث فيه ل' = ٢٤ سم ، ق(∠ل) = ٣٧° ، ق(∠م) = ١٠٠° أوجد لأقرب رقم عشري واحد كل من ن' ، وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

٢ – أ ب جـ مثلث فيه أ' = ٢٠ سم ، ق(∠ب) = ٣٠° ، ق(∠جـ) = ٨٠° أوجد مساحة المثلث أ ب جـ

٣ – Δ أ ب حـ فيه ق(∠أ) = ٦٠ ؛ ق(∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

٤ – Δأ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ٤٠° ؛ ق(∠حـ) = ٧٥° أوجد طول كلا من ب' أ ب قطر الدائرة المارة بروؤس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٥ – أ ب حـ فيه أ' = ١٠سم ؛ ق(∠ب) = ٥٥° ؛ ق(∠حـ) = ٤٠° أوجد طول كلا من حـ' مساحة (Δ أ ب حـ) ؛ محيط الدائرة المارة بروؤس Δ أ ب حـ لأقرب رقم عشري

٦ – Δ أ ب حـ فيه أ' = ٦سم ؛ ق(∠ب) = ١٢° ٤٦' ؛ ق(∠حـ) = ١٨° ٧٤' أوجد طول ب لأقرب رقمين عشريين مساحة الدائرة المارة بروؤس Δ أ ب حـ لأقرب سم٢

٧ – Δ س ص ع فيه ص' = ١٠سم ؛ ق(∠ص) = ١٠٠° ق(∠ع) = ٣٢° أوجد كلا من مساحة (Δ س ص ع) لأقرب سم٢ ؛ محيط Δ س ص ع لأقرب سم

٨ – Δ أ ب حـ فيه حـ' = ١٩سم ؛ ق(∠أ) = ١١٢° ؛ ق(∠ب) = ٣٣° أوجد طول كلا من ب

لأقرب سم ؛ نصف قطر الدائرة الخارجة عن المثلث لأقرب رقمين عشريين

٩ – Δ ﻫ ب حـ فيه ق(∠ ﻫ) = ٦٠° ؛ ق (∠ب) = ٤٠° طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٢٠ سم أوجد مساحة سطح المثلث لأقرب سم٢

١٠ – Δ ﻫ ب حـ فيه ﻫ/ = ١٢ سم ؛ ﻫ حـ = ١٠سم ؛ طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه = ٧سم أوجد طول حـ/ لأقرب سم حيث Δ ﻫ ب حـ حاد الزوايا

١١ – Δ ﻫ ب حـ فيه حا حـ = ٠,٢ ؛ حـ/ = ١٤سم أوجد مساحة الدائرة المارة برؤوسه

١٢ – Δ ﻫ ب حـ فيه ﻫ/ = ٥سم ؛ ق (∠ب) = ١٢٠° ؛ مساحة (Δ ﻫ ب حـ) = ١٠ $\sqrt{3}$ سم٢
أوجد حـ/

١٣ – دائرة محيطها ٤٤سم تمر برؤوس Δ ﻫ ب حـ الذي فيه ق (∠ ﻫ) = ٦٠° أوجد ﻫ/

١٤ – دائرة مساحة سطحها ١٥٤سم٢ تمر برؤوس Δ ﻫ ب حـ الذي فيه ﻫ ب = ب حـ ؛ ق (∠ ب) = ٧٠° أوجد ﻫ/

١٥ – دائرة طول نصف قطرها ١٠سم تمر برؤوس Δ ﻫ ب حـ الذي فيه ق (∠ ﻫ) = ٢٧° ؛ ق (∠ حـ) = ٥٢° أوجد محيط Δ ﻫ ب حـ

١٦ – Δ ﻫ ب حـ فيه ق (∠ ﻫ) : ق (∠ ب) : ق (∠ حـ) = ١ : ٣ : ٥
فإذا كان ﻫ/ = ١٨,٣ سم أوجد محيط Δ ﻫ ب حـ لأقرب سم

١٧ – Δ س ص ع فيه ق (∠ س) : ق (∠ ص) : ق (∠ ع) = ١ : ٢ : ٣ إثبت أن :
س/٢ : ص/٢ : ع/٢ = ١ : ٣ : ٤

١٨ – Δ ﻫ ب حـ فيه ﻫ/ = ٨ سم إثبت أن : ـ مساحة (Δ ﻫ ب حـ) = $\frac{\text{٢ب/ حـ/}}{\text{نق}}$
حيث نق طول نصف قطر الدائرة الخارجة عن Δ ﻫ ب حـ

١٩ – Δ س ص ع قائم الزاوية في ص ، ق (∠ ع) = ٣٠° إثبت أن مساحته = $\sqrt{3}$ نق

٢٠ – في Δ ﻫ ب حـ إثبت أن : ـ مساحة (Δ ﻫ ب حـ) = ٢ نق٢ حا ﻫ حاب حا حـ

٢١ - Δ ٩ ب حـ محيطه ١٦سم ؛ ق (∠ ٩) = ٥٠° ؛ ق (∠ ب) =٥٦° أوجد ب/ ، حـ/

٢٢ - Δ ٩ ب حـ محيطه ١٢ سم ؛ ق (∠ ٩) =٤٧° ؛ ق (∠ ب) = ٥٣° أوجد ب/

٢٣ - Δ ٩ ب حـ فيه ب حـ = ٥٥سم ، ق (∠ حـ) =٢٧° ، ق (∠ ٩) = ٢٩° أوجد طول مسقط ٩ ب علي ب حـ ؛ طول العمود المرسوم من ٩ علي ب حـ لأقرب سم

٢٤ - Δ ٩ ب حـ فيه ٩/ = ١٠سم ، ق (∠ ب) =٥٠° ، ق (∠ حـ) =٦٠° أوجد طول كلا من نصفي قطري الدائرتين الخارجة والداخلة للمثلث ٩ ب حـ

٢٥ - ٩ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٩ ب = ١٨سم ؛ ق (∠ حـ ٩ ب) = ٣٦° ، ق (∠ ء ب ٩) = ٤٤° أوجد طول قطره ٩ حـ ؛ مساحة سطح متوازي الأضلاع ٩ ب حـ ء لأقرب وحدة

٢٦ - ٩ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه ٩ حـ = ٢٠ سم ؛ ق (∠ ب ٩ م) =٣٨° حيث م نقطة تقاطع قطريه؛ ق (∠ ٩ ب م) =٦٢ أوجد طول كلا من ٩ ب ؛ ب ء

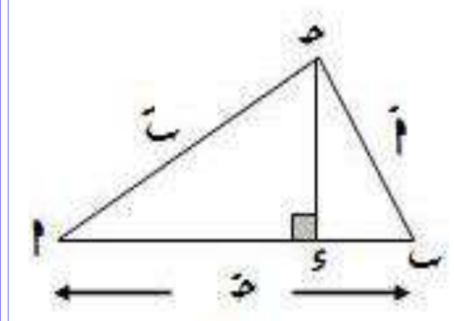
٢٧ - ٩ ب حـ ء شبه منحرف فيه ٩ ء // ب حـ ؛ ٩ ء = ١٥ سم ؛ ق (∠ ء) =١٠٠° ؛ ق (∠ ب) = ٦٥° ؛ ق (∠ ٩ حـ ب) =٣٢° أوجد طول كلا من ٩ جـ ، ب حـ لأقرب سم ، مساحة سطح شبه المنحرف ٩ ب حـ ء لأقرب سم؟

٢٨ - ٩ ب حـ ء شكل رباعي دائري حيث ٩ ب قطر الدائرة المارة بروؤسه وطول نصف قطرها ٧سم ، ق (∠ حـ ٩ ب) =٢٠° ، ق (∠ ٩ ب ء) =٤٠° أوجد مساحة سطح الشكل ٩ ب حـ ء

٢٩ - ٩ ب حـ ء هـ مخمس منتظم طول ضلعه ١٨سم أوجد طول قطره لأقرب سم

٣٠ - ٩ ب جـ متساوي الساقين فيه ق (∠ ٩) = ١٢٠° ،وطول نصف قطر الدائرة المارة بروؤسه ٢٠ سم أوجد ب/ ، ثم استنتج مساحة المثلث لأقرب سم؟

قانون جيب التمام (قاعدة جيب التمام)



في ∆ أ ب حـ يكون :

أ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ − ٢ ب/ حـ/ حتا أ

ب/٢ = أ/٢ + حـ/٢ − ٢ أ/ حـ/ حتا ب

حـ/٢ = أ/٢ + ب/٢ − ٢ أ/ ب/ حتا حـ

البرهـــــــــــان

∵ ∆ حـ ء ب قائم الزاوية فى ء

∴ أ/٢ = (ب حـ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء ب)٢ ، ∵ ء ب = ب أ − ء أ

∴ أ/٢ = (ب حـ)٢ = (ء حـ)٢ + (ب أ − ء أ)٢

= (ء حـ)٢ + (ب أ)٢ + (ء أ)٢ − ٢ ب أ × ء أ

، ∵ ∆ حـ ء أ قائم الزاوية فى ء ∴ (حـ أ)٢ = (ء حـ)٢ + (ء أ)٢

، حتا أ = $\frac{\text{ء أ}}{\text{حـ أ}}$ ∴ ء أ = حـ أ حتا أ

∴ أ/٢ = (حـ أ)٢ + (ب أ)٢ − ٢ حـ أ × ب أ حتا أ

∴ أ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ − ٢ ب/ حـ/ حتا أ

إذا علمت أطوال أضلاع مثلث أو النسبة بينها		إذا علم طولا ضلعين فى مثلث وقياس الزاوية المحصورة بينهما
حتا أ = $\frac{\text{ب/٢ + حـ/٢ − أ/٢}}{\text{٢ ب/ حـ/}}$	ومنها	• أ/٢ = ب/٢ + حـ/٢ − ٢ ب/ حـ/ حتا أ
حتا ب = $\frac{\text{أ/٢ + حـ/٢ − ب/٢}}{\text{٢ أ/ حـ/}}$	ومنها	• ب/٢ = أ/٢ + حـ/٢ − ٢ أ/ حـ/ حتا ب
حتا حـ = $\frac{\text{أ/٢ + ب/٢ − حـ/٢}}{\text{٢ أ/ ب/}}$	ومنها	• حـ/٢ = أ/٢ + ب/٢ − ٢ أ/ ب/ حتا حـ

ملاحظات :

• لإيجاد قياس إحدى زوايا مثلث يفضل إستخدام قانون جيب التمام لأنه يحدد نوع الزاوية فإذا كانت حتا أ موجبة كانت ∠ أ حادة
أما إذا كانت حتا أ سالبة كانت ∠ أ منفرجة

- أكبر زوايا المثلث قياساً تقابل أكبر الأضلاع طولاً ، أصغرها قياساً تقابل أصغر الأضلاع طولاً
- إذا كان : أ/ : ب/ : حـ/ = ٣ : ٤ : ٥ نفرض أن: أ/ = ٣ ل ، ب/ = ٤ ل ، حـ/ = ٥ ل
  ثم نعوض فى قانون جيب التمام لإيجاد قياسات زوايا Δ أ ب حـ

مثـــ١ـــال : مثلث أ ب حـ فيه أ/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠ حـ) =٨٧° أوجد حـ/ لأقرب سم

الحـــــــــــــل

حـ/٢ = أ/٢ + ب/٢ – ٢ أ/ ب/ حتا حـ

= (١٣)٢ + (١٥)٢ – ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

= ٣٧٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٣٧٤}$ = ١٩ سم

مثـــ٢ـــال : أوجد قياس أكبر زاوية في المثلث أ ب جـ الذي فيه أ/ = ٣سم ، ب/ = ٥ سم ، جـ/ = ٧ سم

الحـــــــــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

حتا حـ = $\frac{أ/^٢ + ب/^٢ - حـ/^٢}{٢ أ/ ب/}$ = $\frac{٣^٢ + ٥^٢ - ٧^٢}{٢ \times ٣ \times ٥}$ = – $\frac{١}{٢}$

∴ ق (∠ جـ) = ١٢٠°

مثـــ٣ـــال : مثلث أ ب حـ فيه $\frac{١}{٢}$ جا أ = $\frac{١}{٣}$ جا ب = $\frac{١}{٤}$ جا جـ أحسب ق(∠جـ) ؟

الحـــــــــــــل

∵ $\frac{جا أ}{٢}$ = $\frac{حا ب}{٣}$ = $\frac{حا جـ}{٤}$ ، ∵ $\frac{أ/}{جا أ}$ = $\frac{ب/}{حا ب}$ = $\frac{جـ/}{حا جـ}$

∴ $\frac{أ/}{٢}$ = $\frac{ب/}{٣}$ = $\frac{جـ/}{٤}$ = م ∴ أ/ = ٢ م ، ب/ = ٣ م ، جـ/ = ٤ م

∵ حتا حـ = $\frac{أ/^٢ + ب/^٢ - حـ/^٢}{٢ أ/ ب/}$ = $\frac{٤م^٢ + ٩م^٢ - ١٦م^٢}{٢ \times ٢م \times ٣م}$ = $\frac{-٣م^٢}{١٢م^٢}$

∴ جتا جـ = $\frac{-١}{٤}$ (سالبة) ∴ الزاوية جـ منفرجة وبإستخدام حاسبة الجيب

∴ ق (∠ جـ) = ٢٨ َ ١٠٤°

مثـــ٤ــال : إذا كان طولا ضلعين فى مثلث هما $\sqrt{٣} + ١$ ، $\sqrt{٣} - ١$ والزاوية بينهما قياسها ١٢٠° أوجد بدون الحاسبة طول الضلع الثالث

الحـــــــــــل

بفرض أن : أ/ = $\sqrt{٣} + ١$ ، ب/ = $\sqrt{٣} - ١$ ، ق(∠ جـ) = ١٢٠°

∵ حـ/^٢ = أ/^٢ + ب/^٢ − ٢ أ/ ب/ حتا حـ

$= (\sqrt{٣} + ١)^٢ + (\sqrt{٣} - ١)^٢ - ٢ \times (\sqrt{٣}+١)(\sqrt{٣} - ١) \times$ حتا ١٢٠°

$= ٤ + ٢\sqrt{٣} + ٤ - ٢\sqrt{٣} - ٤ \times (-\frac{١}{٢}) = ١٠$

∴ جـ/^٢ = ١٠ ∴ طول الضلع الثالث = جـ/ = $\sqrt{١٠}$

مثـــ٥ــال : مثلث أ ب حـ فيه أ/ = ٥سم ، مساحة سطحه = $١٠\sqrt{٣}$ سم^٢ ، ق(∠ ب) = ١٢٠° أوجد جـ/ ، ب/ لأقرب سم ثم أوجد ق(∠ أ)

الحـــــــــــل

∵ مساحة سطح Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ أ/ جـ/ جا ب

$١٠\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times$ جـ/ × جا ١٢٠°

∴ $١٠\sqrt{٣} = \frac{١}{٢} \times ٥ \times$ جـ/ × $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

∴ جـ/ = $١٠\sqrt{٣} \div \frac{٥\sqrt{٣}}{٤}$ = ٨ سم

∵ ب/^٢ = أ/^٢ + جـ/^٢ − ٢ أ/ جـ/ حتا ب

ب/^٢ = (٥)^٢ + (٨)^٢ − ٢ × ٥ × ٨ × حتا ١٢٠°

ب/^٢ = ١٢٩ ∴ ب/ = $\sqrt{١٢٩}$ = ١١,٣٦ سم

∵ ∠ ب منفرجة ∴ ∠ أ حادة

∵ $\frac{أ/}{جا أ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٥}{جا أ} = \frac{١١,٣٦}{جا ١٢٠°}$

∴ جا أ = $\frac{٥ \times جا ١٢٠°}{١١,٣٦}$ بإستخدام الحاسبة ∴ ق(∠ أ) = ٢٢° ٢٤/

مثـــ٦ـال : في المثلث ٢ ب جـ فيه ٢/ = ١٥سم ، ب/ = ٢٥ سم ، جـ/ = ٣٥ سم
أثبت أن جـ هى قياس أكبر زاوية فى المثلث وأنها تحقق العلاقة :
جتا حـ - ٥ $\sqrt{٣}$ جا جـ + ٨ = صفر

الحـــــــــل

أكبر زاوية هى ∠ جـ لأنها تقابل أكبر الأضلاع طولا : جـ/ = ٧سم

$$جتا حـ = \frac{٢/^٢ + ب/^٢ - حـ/^٢}{٢ \, ٢/ \, ب/} = \frac{(١٥)^٢ + (٢٥)^٢ - (٣٥)^٢}{٢ \times ١٥ \times ٢٥} = -\frac{١}{٢}$$

∴ ق(∠ جـ) = ١٢٠°

∴ الطرف الأيمن = جتا ١٢٠° - ٥ $\sqrt{٣}$ جا ١٢٠° + ٨

$$= -\frac{١}{٢} - ٥\sqrt{٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} + ٨ = -٠,٥ - ٧,٥ + ٨ = صفر$$

تمــــــــــارين

١ - Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ = ١٣سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد ق (∠ ٢)

٢ - Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ = ١٧سم ، ب/ = ١٤سم ، حـ/ = ١٥سم أوجد قياس أصعر زواياه

٣ - Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ = ١٢ سم ، ب/ = ١٣سم ، حـ/ = ١٠سم أوجد ق (∠ ٢) ثم
أحسب طول نصف قطر الدائرة المارة برؤوسه لأقرب سم

٤ - Δ س ص ع فيه س/ = ١٥سم ، ص/ = ١٢ سم ، ق (∠ ع) = ٨٧° أوجد ع/ لأقرب سم

٥ - Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ = ١٠سم ، ب/ = ١٦سم ، ق (∠ حـ) = ٦٠° أوجد حـ/ لأقرب سم
ثم أحسب مساحة (Δ ٢ ب حـ) لأقرب سم٢

٦ - Δ ٢ ب حـ فيه جتا ٢ = $\frac{٢}{٣}$ ، ب/ = ١٦سم ، حـ/ = ١٢ سم إثبت أنه متساوي الساقين

٧ - Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ : ب/ : حـ/ = ١: ٣ : ١ أوجد قياس أكبر زواياه

٨ - Δ ٢ ب حـ فيه ٢/ = ٢ ب/ جتا حـ إثبت أن Δ ٢ ب حـ متساوي الساقين

٩ - Δ س ص ع فيه ص ع = ١٤سم ، ق (∠ ص) = ٦٠° ، مساحة (Δ س ص ع) = ٤٩ $\sqrt{٣}$ سم
أوجد محيط Δ س ص ع لأقرب سم

١٠ - Δ س ص ع فيه س/ = ٤سم ، ص/ = ٥سم ، ع/ = ٦سم أوجد طول العمود المرسوم من رأس
اكبر زاوية للمثلث علي الضلع المقابل لأقرب رقم عشري

١١- Δ س ص ع أوجد قياس أكبر زواياه إذا علم أن أطوال ارتفاعاته هي ١٢ سم ، ١٥سم ، ٢٠ سم

١٢ – Δ أ ب جـ فيه ب جـ = ٢٠ سم ، ق (∠ ب) = ٢٩° ، ق (∠ جـ) = ٣٧° ، ء منتصف ب جـ
أوجد طول كلا من أ ب ، أ ء لأقرب رقم عشري

١٣ – Δ س ص ع فيه ٤حا س = ٣حا ص = ٢ حا ع أوجد قياس أكبر زواياه

١٤ – Δ س ص ع فيه ق(∠ ص) = ٦٠° ، س َ = ٢ ع َ أوجد ق (∠ ع) ، ق (∠ س)

١٥ – Δ أ ب جـ فيه ب َ^{2} = (جـ َ - أ َ)^2 + جـ َ أ َ أوجد ق (∠ ب)

١٦ – أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ جـ = ١٦سم ، ب ء = ٢٠سم ، ق (∠ أ م ب) = ٥٤°
حيث م نقطة تقاطع القطرين أوجد طول أ ء لأقرب سم

١٧ – أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ١٦سم ، ب ء = ٢٥ سم ، ب جـ = ١٨سم أوجد
طول أ جـ لأقرب رقم عشري ، ق (∠ ب أ جـ)

١٨ – أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ٨ سم ، ب ء = ٩ سم ، ب جـ = ١١ سم أوجد
طول أ جـ لأقرب سم ، مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ ء لأقرب سم^2

١٩ – أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ١٨سم ، ب جـ = ١٠ سم ، ء جـ = ١٦ سم ،
ء أ = ١٨سم ، أ جـ = ٢٢ سم إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

٢٠ – أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٧ سم ، ء جـ = ٥ سم ، ء ب =٨ سم
، أ جـ = ٨ سم إثبت أن الشكل أ ب جـ ء رباعي دائري

٢١ – أ ب جـ ء متوازي أضلاع فيه ق ∠ (ب) = ١٢٠° ، محيطه = ١٦سم ، طول القطر الأكبر
= ٧ سم أوجد طول كلا من أ ب ، ب جـ لأقرب سم

٢٢ – أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء أ ب) =
ق (∠ ء ب جـ) = ٩٠° ، ق (∠ ء جـ ب) = ٣٠° أوجد طول أ جـ لأقرب سم

٢٣ – أ ب جـ ء شكل رباعي فيه أ ء = ٨ سم ، ب ء = ١٠ سم ، ق (∠ ء أ ب) =
ق (∠ ء ب جـ) = ٦٥° ، ق (∠ أ ب ء) = ٥٠° أوجد ق (∠ ب جـ ء)

٢٤ – Δ س ص ع فيه ء منتصف س ص إثبت أن : (ع س)^2 + (ع ص)^2 = ٢ (ع ء)^2 + ٢ (س ء)^2

٢٥ – أ ب جـ ء متوازي أضلاع إثبت أن : (أ جـ)^2 + (ب ء)^2 = ٢ (أ ب)^2 + ٢ (ب جـ)^2

٢٦ – أ ب جـ فيه ء منتصف ب جـ ، جـ َ = ٥سم ، ب َ = ٦سم ، أ ء = ٤.٣سم أوجد أ َ لأقرب سم

حـــل المثلث

معنى حل المثلث : المثلث يتكون من ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا

المقصود بحل المثلث هو معرفة أطوال أضلاعه وقياس زواياه ويستلزم معرفة قياس ثلاث عناصرمن عناصره الست بشرط أن يكون أحد هذه العناصر الثلاث هو طول أحد الأضلاع

الحالة الأولى : حل المثلث إذا علم فيه قياسا زاويتين وطول ضلع

يستخدم قانون الجيب فى حل المثلث متى علم قياسا زاويتين فيه وطول أحد أضلاعه

فمثلاً فى Δ ٢ ب حـ إذا علم : ق (∠٢) ، ق(∠ب) ، ٢/

فيمكن إيجاد ق(∠حـ) حيث : ق(∠حـ) = ١٨٠° − [ق (∠٢) + ق(∠ب)]

ومن قانون الجيب $\frac{٢/}{حا ٢} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ لإيجاد كلا من : ب/ ، حـ/

حيث : ب/ = $\frac{٢/ \times حاب}{جا ٢}$ ،،،، جـ/ = $\frac{٢/ \times حاجـ}{جا ٢}$

مثـ ١ــال: حل Δ ٢ ب حـ الذى فيه ق (∠٢) = ٤٥° ، ق(∠ب) = ٦٠° ، ٢/ = ١٠سم

الحـــــــــــل

∵ ق(∠٢) = ١٨٠° − (٤٥° + ٦٠°) = ٧٥° (١)

∴ $\frac{٢/}{حا ٢} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ ∴ $\frac{١٠}{حا٧٥°} = \frac{ب/}{حا ٤٥°} = \frac{حـ/}{حا٦٠°}$

∴ ب/ = $\frac{١٠ \times حا}{٤٥°}$ = ٧,٤ سم (٢)

، جـ/ = $\frac{١٠ \times حا٦٠°}{جا ٧٥°}$ = ٩ سم (٣)

مثـ ٢ــال: حل Δ ٢ ب حـ الذى فيه ق (∠٢) = ٢٠/ ٤١° ، ق(∠ب) = ١٧/ ٥٩° ، ٢/ = ٥,٦١٤ سم

الحـــــــــــل

∵ ق(∠٢) = ١٨٠° − (٢٠/ ٤١° + ١٧/ ٥٩°) = ٢٣/ ٧٩° (١)

∵ $\frac{٢/}{حا ٢} = \frac{ب/}{حا ب} = \frac{حـ/}{حا حـ}$ ∴ $\frac{٥,٦٤١}{حا ٢٠ ٤١} = \frac{ب/}{حا ١٧ ٥٩} = \frac{حـ/}{حا ٢٣ ٧٩}$

∴ ب/ = $\frac{\text{٥,٦٤١} \times \text{حا ١٧ َ ٥٩ ْ}}{\text{جا ٢٠ َ ٤١ ْ}}$ = ٧,٣١ سم (٢)

، جـ/ = $\frac{\text{٥,٦٤١} \times \text{حا ٢٣ َ ٧٩ ْ}}{\text{جا ٢٠ َ ٤١ ْ}}$ = ٨,٣٥ سم (٣)

مثـ٣ ـال: حل Δ ل م ن فيه ، ق(∠ل) = ٥٢ َ ٣٨ ْ ، ق(∠ن) = ١٧ َ ٤٤ ْ
م/ = ٣٥٢,٧

الحـــــــــــــــل

∵ ق(∠م) = ١٨٠ ْ – (٥٢ َ ٣٨ ْ + ١٧ َ ٤٤ ْ) = ٥١ َ ٩٦ ْ (١)

∴ $\frac{\text{م/}}{\text{جا م}}$ = $\frac{\text{ل/}}{\text{حا ل}}$ = $\frac{\text{ن/}}{\text{حا ن}}$

∴ $\frac{\text{٣٥٢,٧}}{\text{جا ٥١ َ ٩٦ ْ}}$ = $\frac{\text{ل/}}{\text{جا ٥٢ َ ٣٨ ْ}}$ = $\frac{\text{ن/}}{\text{حا ١٧ َ ٤٤ ْ}}$

∴ ل/ = $\frac{\text{٣٥٢,٧} \times \text{جا ٥٢ َ ٣٨ ْ}}{\text{جا ٥١ َ ٩٦ ْ}}$ = ٢٢٢,٩ (٢)

∴ ن/ = $\frac{\text{٣٥٢,٧} \times \text{جا ١٧ َ ٤٤ ْ}}{\text{جا ٥١ َ ٩٦ ْ}}$ = ٢٤٨ (٣)

تمـــــــارين

١ – حل Δ ا ب حـ الذي فيه ا/ = ١٦سم ، ق (∠ب) = ٥٥ ْ ، ق (∠حـ) = ٨٠ ْ

٢ – حل Δ ا ب حـ الذي فيه ا/ = ١٠سم ، ق (∠ب) = ٦٢ ْ ، ق (∠حـ) = ٤٨ ْ

٣ – حل Δ ا ب حـ الذي فيه ب/ = ٢٣ سم ، حـ/ = ٣٧سم ، ق (∠ا) = ٦٠ ْ

٤ – حل Δ ا ب حـ الذي فيه ا/ = ١٦سم ، ب/ = ٢٥ سم ، ق (∠حـ) = ٣٠ َ ١٠٤ ْ

٥ – حل Δ ا ب حـ الذي فيه ا ب = ا حـ ، ق(∠ا) = ٨٠ ْ ، مساحة سطح الدائرة الخارجة عنه = ١٥٤سم٢

٦ – حل Δ ا ب حـ الذي فيه ا/ = ٤ سم ، ق (∠ا) = ٢ ق (∠ب) = ٦٠ ْ
ثم أوجد مساحته

الحالة الثانية : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما

ليكن معلوم فى Δ م ب حـ طولا م/ ، ب/ ، ق(∠حـ)

لذلك نطبق قانون جيب التمام : حـ/² = م/² + ب/² – ٢ م/ ب/ حتا حـ

ومنه نوجد ق (∠م) حيث : حتا م = $\frac{\text{ب}/^2 + \text{حـ}/^2 - \text{م}/^2}{2\ \text{ب}/\ \text{حـ}/}$

ثم نوجد ق(∠ب) حيث : ق(∠ب) = ١٨٠° – [ق (∠م) + ق(∠حـ)]

مثـ ١ ـــال : حل Δ م ب حـ الذى فيه م/ = ١٣سم ، ب/ = ١٥سم ، ق(∠جـ) = ٨٧°

الحـــــــــل

حـ/² = م/² + ب/² – ٢ م/ ب/ حتا حـ

= (١٣)² + (١٥)² – ٢ × ١٣ × ١٥ × حتا ٨٧

∴ حـ/² = ٣٧٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٣٧٤}$ = ١٩ سم (١)

حتا م = $\frac{\text{ب}/^2 + \text{حـ}/^2 - \text{م}/^2}{2\ \text{ب}/\ \text{حـ}/}$ = $\frac{١٥^2 + ١٩^2 - ١٣^2}{٢ \times ١٥ \times ١٩}$ ≈ ٠,٧٣١٥

∴ ق (∠م) = ٥٩ َ ٤٢° (٢)

، ق(∠ب) = ١٨٠° – [٨٧° + ٥٩ َ ٤٢°] = ٥٠° (٣)

مثـ ٢ ـــال : حل Δ م ب حـ الذى فيه م/ = ٨٠ ، ب/ = ٥٠ ، ق(∠جـ) = ٢ َ ٦٠°

الحـــــــــــل

حـ/² = م/² + ب/² – ٢ م/ ب/ حتا حـ

= (٨٠)² + (٥٠)² – ٢ × ٨٠ × ٥٠ × حتا ٢ َ ٦٠°

∴ حـ/² = ٤٩٦٤ ∴ حـ/ = $\sqrt{٤٩٦٤}$ = ٧٠,٤٥٥٧ (١)

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{\text{ب}/}{\text{جا ب}}$ = $\frac{\text{جـ}/}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{٥٠}{\text{جا ب}}$ = $\frac{٧٠,٤٦}{\text{جا } ٢ َ ٦٠°}$

∴ جا ب = $\frac{٥٠ \times جا ٢ / ٦٠°}{٧٠,٤٦}$ ∴ ق(∠ ب) = ٥٦/ ٣٧° (٢)

∴ ق (∠ ﺃ) = ١٨٠° - [٥٦ ٣٧° + ٢ ٦٠°] = ٢/ ٨٢° (٣)

مثـ٣ ـال : حل ∆ س ص ع الذى فيه س/ = ١٦ ، ص/ = ٢٥ ، ق(∠ ع) =٣٠/ ١٠٤°

الحـــــــــــل

ع/٢ = س/٢ + ص/٢ – ٢ س/ ص/ حتا ع

= (١٦)٢ + (٢٥)٢ – ٢ × ١٦ × ٢٥ × حتا ٣٠ ١٠٤°

∴ ع/٢ = ١٠٨١,٣٢ ∴ ع/ = $\sqrt{١٠٨١,٣٢}$ = ٣٢,٨٨ (١)

حتا س = $\frac{ص/^٢ + ع/^٢ - س/^٢}{٢ ص/ ع/}$ = $\frac{٢٥^٢ + ٣٢,٩^٢ - ١٦}{٢ \times ٢٥ \times ٣٢,٩}$ ≈ ٠.٨٨٢٣

∴ ق (∠ س) = ٦/ ٢٨°

، ق(∠ص) = ١٨٠° – [٦/ ٢٨° + ٣٠/ ١٠٤°] = ٢٤/ ٤٧°

تمـــــــارين

١ – حل ∆ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ/ = ٢٥,٣ سم ، حـ/ = ١٤,٧ سم ، ق (∠ ب) = ١,٢ ء

٢ – حل ∆ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ ب = ٤٨,٥ سم ، ب حـ = ٤٦ سم ، حتا ب = – ٠,٦

٣ – حل ∆ ﺃ ب حـ الذي فيه ب حـ = ٣٦ سم ، ﺃ ب = ٣٠ سم ، ق (∠ ب) = ١٠/ ٧٨°
ثم أوجد الإرتفاع المرسوم من ب على $\overline{ﺃ حـ}$

٤ – حل ∆ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ/ = ٢١ سم ، حتا ب = $\frac{٤}{٥}$ ، ظا حـ = $\frac{٧}{٢٤}$

٥ – حل ∆ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ/ = ١٣ سم ، ق (∠ ﺃ) = ٦٠° ومحيطه ٣٥ سم

٦ – حل ∆ ﺃ ب حـ الذي فيه ﺃ/ = ١٣ سم ، ق (∠ ﺃ) = ٢٤° ، طول قطر الدائرة المارة
بروؤسه يساوى ٨ سم

الحالة الثالثة : حل المثلث إذا علمت أطوال أضلاعه الثلاثة

فى Δ ٩ ب حـ إذا علم : ٩/ ، ب/ ، حـ/ نوجد

أولاً : نوجد ق (∠٩) حيث : $\text{حتا } ٩ = \frac{\text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - ٩'^2}{٢\ \text{ب}'\ \text{حـ}'}$

ثانياً : نوجد ق(∠ب) حيث : $\text{حتا ب} = \frac{٩'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{٢\ ٩'\ \text{حـ}'}$

ثالثاً : نوجد ق(∠حـ) حيث : ق(∠حـ) = ١٨٠° - [ق (∠٩) + ق(∠ب)]

مثـــ١ـــال : حل Δ ٩ ب حـ الذى فيه ٩/ = ٥ سم ، ب/ = ٧سم ، حـ/ = ١١ سم

الحـــــــــــل

$\text{حتا } ٩ = \frac{\text{ب}'^2 + \text{حـ}'^2 - ٩'^2}{٢\ \text{ب}'\ \text{حـ}'} = \frac{٧^2 + ١١^2 - ٥^2}{٢ \times ٧ \times ١١}$ ∴ ق (∠٩) = ١٩° ٤١′

$\text{حتا ب} = \frac{٩'^2 + \text{حـ}'^2 - \text{ب}'^2}{٢\ ٩'\ \text{حـ}'} = \frac{٥^2 + ١١^2 - ٧^2}{٢ \times ٥ \times ١١}$ ∴ ق (∠ب) = ٢٨° ٨′

ق(∠حـ) = ١٨٠° − [١٩° ٤١′ + ٢٨° ٨′] = ١٣٢° ١١′

مثـــ٢ـــال : حل Δ ٩ ب حـ الذى فيه ٩/ = ٨ سم ، ب/ = ٥سم ، حـ/ = ٧ سم

الحـــــــــــل

$\text{حتا ب} = \frac{\text{حـ}'^2 + ٩'^2 - \text{ب}'^2}{٢\ ٩'\ \text{حـ}'} = \frac{٧^2 + ٨^2 - ٥^2}{٢ \times ٧ \times ٨}$ ∴ ق (∠ب) = ٣٨° ١٣′

$\text{حتا جـ} = \frac{٩'^2 + \text{ب}'^2 - \text{حـ}'^2}{٢\ ٩'\ \text{حـ}'} = \frac{٨^2 + ٥^2 - ٧^2}{٢ \times ٨ \times ٥}$ ∴ ق (∠جـ) = ٦٠°

ق(∠حـ) = ١٨٠° − [٣٨° ١٣′ + ٦٠°] = ٨١° ٤٧′

تمـــــــارين

١ – حل △ ﻢ ب حـ الذي فيه ﻢ/ = ٨ سم ، ب/ = ٥ سم ، حـ/ = ٧ سم

٢ – حل △ ﻢ ب حـ الذي فيه ﻢ/ = ٦ سم ، ب/ = ٩ سم ، حـ/ = ٥ سم

٣ – حل △ ﻢ ب حـ الذي فيه ﻢ ب : ب حـ : ﻢ حـ = ٤ : ٥ : ٧ ومحيطه ٤٨ سم

الحالة الرابعة : حل المثلث إذا علم فيه طولا ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لإحداهما (الحالة المبهمة)

فى △ ﻢ ب حـ إذا علم ﻢ/ ، ب/ ، ق (∠ ﻢ) نوجد قيمة ع = ب/ جاﻢ ونلاحظ

أولاً : إذا كانت ∠ ﻢ حادة وكان				ثانياً: إذا كانت ∠ ﻢ قائمة أو منفرجة وكان	
١	إذا كان: ﻢ/ < ع فإنه لا يمكن رسم مثلث	٢	إذا كان: ﻢ/ = ع فإنه يمكن رسم مثلث وحيد قائم الزاوية	١	إذا كان: ﻢ/ ⩽ ب/ فإنه لا يمكن رسم مثلث
٣	إذا كان: ع < ﻢ/ < ب/ فإنه يمكن رسم مثلثان	٤	إذا كان: ﻢ/ ⩾ ب/ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد	٢	إذا كان: ﻢ/ > ب/ فإنه يمكن رسم مثلث وحيد

مثـــال ١ : حل △ ﻢ ب حـ الذى فيه ﻢ/ = ٧ سم ، ب/ = ٤ سم ، ق(∠ ﻢ) = ١١٢°

الحــــــل

∵ ∠ ﻢ منفرجة ⟸ ∠ ب حادة ، ﻢ/ > ب/ ∴ يوجد للمثلث حل وحيد

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{ﻢ/}{جا ﻢ} = \frac{ب/}{جا ب} = \frac{جـ/}{جا جـ}$ ∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{٤}{جا ب}$

∴ جا ب = $\frac{٤ \times جا ١١٢°}{٧}$ ∴ق(∠ ب) = ٣٢° (١)

∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° – [١١٢° + ٣٢°] = ٣٦° (٢)

∴ $\frac{٧}{جا ١١٢°} = \frac{جـ/}{جا ٣٦}$ ∴ جـ/ = $\frac{٧ \times جا ٣٦}{جا ١١٢°}$ ∴ جـ/ = ٤,٤٤ سم (٣)

مثـ٢ـال : حل Δ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ٩ سم ، ب/ = ١٣ سم ، ق(∠ أ) =٩٨°

الحـــل

∵ ∠ أ منفرجة ، أ/ < ب/ ∴ لا يوجد حل للمثلث

مثـ٣ـال : حل Δ أ ب حـ الذى فيه أ/ = ٢٠سم ، ب/ = ٢٨ سم ، ق(∠ أ) = ٤٢°

الحـــل

∵ ∠ أ = ٤٢° (حادة) ، ع = ب/ × جا أ = ٢٨ × جا٤٢ ≃ ١٨,٧

∵ ع < أ/ < ب/ يوجد للمثلث حلان

∴ $\frac{\text{أ}/}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}/}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{٢٠}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{٢٨}{\text{ب}}$

∴ جا ب = $\frac{٢٨ \times \text{جا } ٤٢°}{٢٠}$ ∴ ق(∠ ب) = ٧٠° ، أ، ق(∠ ب) = ١١٠°

∴ ق(∠ جـ) = ١٨٠° - [٤٢° + ٧٠°] = ٦٨° ، أ، ق(∠ جـ) = ٢٨°

∴ $\frac{٢٠}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا } ٦٨°}$ ∴ جـ/ = $\frac{٢٠ \times \text{جا } ٦٨°}{\text{جا } ٤٢°}$ ∴ جـ/ ≃ ٢٧,٧ سم

∴ $\frac{٢٠}{\text{جا } ٤٢°} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا } ٢٨°}$ ∴ جـ/ = $\frac{٢٠ \times \text{جا } ٢٨°}{\text{جا } ٤٢°}$ ∴ جـ/ ≃ ١٤ سم

مثـ٤ـال : حل Δ أب جـ الذى فيه أ/ = ٤ ، ب/ = ٣ ، ق(∠ أ) =٥٠°

الحـــل

∵ ∠ أ = ٥٠° (حادة) ، ع = ب/ × جا أ = ٣ × جا٥٠ ≃ ٢,٢٩

∵ أ/ > ب/ يوجد حل للمثلث وحيد

وبتطبيق قانون الجيب $\frac{\text{أ}/}{\text{جا أ}} = \frac{\text{ب}/}{\text{جا ب}} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا جـ}}$ ∴ $\frac{٤}{\text{جا } ٥٠°} = \frac{٣}{\text{جا ب}}$

∴ جا ب = $\frac{٣ \times \text{جا } ٥٠°}{٤}$ ∴ ق(∠ ب) = ٣٥° ٤/ (١)

∴ ق(∠ جـ) = ١٨٠° - [٥٠° + ٣٥° ٤/] = ٩٤° ٥٦/ (٢)

∴ $\frac{٤}{\text{جا } ٥٠°} = \frac{\text{جـ}/}{\text{جا } ٥٦/ \ ٣٥°}$ ∴ جـ/ = $\frac{٤ \times \text{جا } ٥٦/ \ ٩٤°}{\text{جا } ٥٠°}$ ∴ جـ/ = ٥,٢ سم (٣)

مثـ٥ــال : حل Δ ﺍ ب حـ الذى فيه ﺍ/ = ٥ سم ، ب/ = ٧ سم ، ق(∠ ﺍ) = ٦٠°

الحـــــل

∵ ∠ ﺍ = ٦٠° (حادة) ، ع = ب × جا ﺍ = ٧ × جا ٦٠ ≃ ٦,١

∵ ﺍ/ < ع ∴ لايوجد حل للمثلث

مثـ٦ــال : حل Δ ﺍب جـ الذى فيه ﺍ/ = ٤√٣ ، ب/ = ٦ ، ق(∠ ب) = ٦٠°

الحـــــل

∵ ∠ ب = ٦٠° (حادة) ، ع = ﺍ × جا ب = ٤√٣ × جا ٦٠ = ٦ سم

∵ ع = ب/ يوجد حل للمثلث وحيد قائم الزاوية

وبتطبيق قانون الجيب ﺍ/ ÷ جا ﺍ = ب/ ÷ جا ب = جـ/ ÷ جا جـ ∴ ٦ ÷ جا ٦٠° = ٤√٣ ÷ جا ﺍ

∴ جا ﺍ = (٤√٣ × جا ٦٠°) ÷ ٦ ∴ ق(∠ ﺍ) = ٩٠° (١)

∴ ق (∠ جـ) = ١٨٠° - [٦٠° + ٩٠°] = ٣٠° (٢)

∴ ٦ ÷ جا ٦٠° = جـ/ ÷ جا ٣٠° ∴ جـ/ = (٦ × جا ٣٠°) ÷ جا ٦٠° ∴ جـ/ = ٣,٥ سم (٣)

تمـــــارين

(١) حل Δ ﺍب جـ الذى فيه ﺍ/ = ١٢ سم ، ب/ = ١٥ ، ق(∠ ﺍ) = ١٠٠°

(٢) حل Δ ﺍب جـ الذى فيه ﺍ/ = ١٠ سم ، ب/ = ٩ ، ق(∠ ﺍ) = ٥٧°

(٣) حل Δ س ص ع الذى فيه س/ = ٢١ سم ، ص/ = ٢٦ ، ق(∠ س) = ٥٢°

(٤) حل Δ ﺍب جـ الذى فيه ﺍ/ = ٦ سم ، ب/ = ٨ ، ق(∠ ﺍ) = ٤٧°

(٥) حل Δ ل م ن الذى فيه ل/ = ١٠ سم ، م/ = ١٨ ، ق(∠ ل) = ٣٥°